

第一章、可测空间和可测映射

§1.1 集合及其运算

1. 定义

- 空间(全集): X , 非空.
- 元素(点): x, y, \dots .
- 集合(子集): A, B, \dots , 空集: \emptyset .
- 符号:

$$x \in A, x \notin A, x \in A^c, A \subseteq B, A \cup B, AB = A \cap B,$$

$$B \setminus A \text{ (为强调 } A \subseteq B, \text{ 可用 } B - A), A \Delta B.$$

- 交换律、结合律、分配律.
- 不交: $A \cap B = \emptyset$. 为强调不交, 可用 $A + B$.

- 一族集合 $\{A_t, t \in T\}$:

$$\bigcup_{t \in T} A_t := \{x : \exists t \in T \text{ 使得 } x \in A_t\},$$

$$\bigcap_{t \in T} A_t := \{x : x \in A_t, \forall t \in T\}.$$

- 两两不交: $A_t \cap A_s = \emptyset, \forall s \neq t$.

为强调两两不交, 可用 $\sum_{n=1}^N A_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

- 对偶律(De-Morgan 法则):

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)^c = \bigcap_{t \in T} A_t^c, \quad \left(\bigcap_{t \in T} A_t \right)^c = \bigcup_{t \in T} A_t^c.$$

- 单调(的集合)序列:

非降, $A_n \uparrow$: $A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n$;

非增, $A_n \downarrow$: $A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n$.

- 单调序列的极限:

若 $A_n \uparrow$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,

若 $A_n \downarrow$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

- 任意序列的上极限:

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &:= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \\ &= \{x : \exists n_1 < n_2 < \dots \text{使得 } x \in A_{n_r}, \forall r \geq 1\} = \{A_n \text{ i.o.}\}.\end{aligned}$$

- 任意序列的下极限:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{A_n^c \text{ f.o.}\}.$$

- 若上、下极限相等, 则称该序列的极限存在, 并记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n := \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

§1.2 集合系

- 集合系: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$
- π 系: \mathcal{P} 非空; 对交运算封闭, 即,

$$A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}.$$

- 例1. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.
- 半环: \mathcal{Q} 是 π 系, 若 $A, B \in \mathcal{Q}$ 且 $A \supseteq B$, 则存在有限个两两不交的 $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{Q}$ 使得

$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^n C_k = \sum_{k=1}^n C_k.$$

- 例2. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{Q}_{\mathbb{R}} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$. (注: $\emptyset \in \mathcal{Q}$.)
- ** 可去掉. (习题一、4)

- 环: \mathcal{R} 非空, 对并、差运算封闭, 即

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}.$$

- 注: $A \cup B$ 可改为 $A + B$: $A \cup B = A \setminus B + B$.
- 例4. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k] : a_k, b_k \in \mathbb{R}, \forall k \}$.
- 代数、域: \mathcal{A} 是 π 系, $X \in \mathcal{A}$, 且对补运算封闭, 即

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}.$$

- 注: 可将“ π 系”改为交运算封闭; 或去掉 $X \in \mathcal{A}$:

$$\text{取 } A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{A} \Rightarrow X = \emptyset^c \in \mathcal{A}.$$

- 命题1.2.1. 半环是 π 系, 环是半环, 代数是环.
- 验证 \mathcal{R} 为 π 系: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.
- 证: $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, $A \setminus B = A \cap B^c$.
- 环 = 半环 & 对并运算封闭, 代数 = 环 & 含 X (习题一、6).

- 单调系: 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ 且 A_n 单调, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{M}$.
- λ 系:

$$X \in \mathcal{L}; \quad A, B \in \mathcal{L} \text{ 且 } A \supseteq B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{L};$$

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L} \text{ 且 } A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{L}.$$

- σ 代数(σ 域):

$$X \in \mathcal{F}; \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F};$$

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

- 命题1.2.2. λ 系是单调系; σ 代数是 λ 系.

● 命题1.2.3. σ 代数 = 代数 & 单调系.

● 命题1.2.4. σ 代数 = λ 系 & π 系.

● 证 “ \Leftarrow ” :

$$\stackrel{\lambda \text{系}}{\Rightarrow} A^c = X \setminus A \in \mathcal{F} \stackrel{\pi \text{系}}{\Rightarrow} \text{代数} \stackrel{\lambda \text{系}}{\Rightarrow} \sigma \text{代数}.$$

● σ 环: \mathcal{R} 非空; $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$;

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

● 注: \star 中只用验证 A_1, A_2, \dots 两两不交的情形即可.

● σ 环 = 环 & 单调系, σ 代数 = σ 环 & 含 X , (习题一、6).

- 若 \mathcal{F} 是 X 上的 σ 代数, 则称 (X, \mathcal{F}) 为可测空间.
- 设 A 是 X 的非空子集, \mathcal{E} 是集合系. 定义

$$A \cap \mathcal{E} := \{A \cap E : E \in \mathcal{E}\}.$$

- 习题一、13. (X, \mathcal{F}) 是可测空间. A 是 X 的非空子集, 则 $(A, A \cap \mathcal{F})$ 为可测空间.

从初等概率论的角度看可测空间: (X, \mathcal{F}) .

- 最小的 σ 代数: $\{\emptyset, X\}$,
最大的 σ 代数: $\mathcal{T} = \mathcal{T}_X := \{A : A \subseteq X\}$.
- 有些模型中, \mathcal{T} 太大.
- “可测”:

$$X \in \mathcal{F}; \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F};$$

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

§1.3 σ 代数的生成

- \mathcal{E} 是非空的集合系.
- 定义1.3.1. 称 \mathcal{G} 为 \mathcal{E} 生成的环(单调系、 λ 系、 σ 代数), 若:
(1) $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{E}$, (2) 对任意 $\star\star \mathcal{G}'$,

$$\mathcal{G}' \supseteq \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{G}' \supseteq \mathcal{G}.$$

- \mathcal{E} 生成的 $\star\star =$ 包含 \mathcal{E} 的最小的 $\star\star$.
- 命题1.3.1. \mathcal{E} 生成的 $\star\star$ 存在.
- 证: 将包含 \mathcal{E} 的所有 $\star\star$ 记为 \mathbf{A} , 则 $\mathcal{T} \in \mathbf{A}$. $\bigcap_{\mathcal{G} \in \mathbf{A}} \mathcal{G}$ 即为所求.
- 分别记为 $r(\mathcal{E})$, $m(\mathcal{E})$, $l(\mathcal{E})$, $\sigma(\mathcal{E})$.

定理 (定理1.3.2)

若 \mathcal{Q} 是半环, 则

$$r(\mathcal{Q}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n A_k : A_1, \dots, A_n \in \mathcal{Q} \text{ 且两两不交} \right\}.$$

- 证: 环对并运算封闭, 故 $r(\mathcal{Q}) \supseteq \mathcal{G}$.
- 反过来, 往证 \mathcal{G} 为环: 非空 \checkmark ; 假设 $A, B \in \mathcal{G}$, 往证 $A \setminus B \in \mathcal{G}$.
- 于是, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{G}$.
- 进一步,

$$A \cup B = (A \setminus B) + (B \setminus A) + (A \cap B) \in \mathcal{G}.$$

- 往证 $A \setminus B \in \mathcal{G}$: 假设 $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{Q}$ 使得

$$A = \sum_{i=1}^n A_i, \quad B = \sum_{j=1}^m B_j \in \mathcal{G}.$$

- $A \setminus B = \sum_{i=1}^n (A_i \setminus B) = \sum_{i=1}^n \left(((A_i \setminus B_1) \setminus B_2) \setminus \dots \setminus B_m \right).$
- 往对 m 用归纳法, 以证明 $\star = \sum_{r=1}^{n_i} C_{i,r}$, 于是证毕.
- $m = 1$ 时, 由半环性质得证.
- $m \rightarrow m + 1$:

$$\star \setminus B_{m+1} = \left(\sum_{r=1}^{n_i} C_{i,r} \right) \setminus B_{m+1} = \sum_{r=1}^{n_i} (C_{i,r} \setminus B_{m+1}) = \sum_{r=1}^{n_i} \sum_{s=1}^{m_r} D_{i,r,s}.$$

两个重要的定理及其推论.

- 定理1.3.3.

定理 (单调类定理)

若 \mathcal{A} 是代数, 则 $\sigma(\mathcal{A}) = m(\mathcal{A})$.

- 推论1.3.4. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}$.
- 定理1.3.5.

定理 (λ - π 定理)

若 \mathcal{P} 是 π 系, 则 $\sigma(\mathcal{P}) = l(\mathcal{P})$.

- 推论1.3.6. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L} \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$.

定理 (定理1.3.3, 单调类定理)

若 \mathcal{A} 是代数, 则 $\sigma(\mathcal{A}) = m(\mathcal{A})$.

- $\sigma(\mathcal{A})$ 是单调系, 且 $\supseteq \mathcal{A}$, 因此 $\supseteq m(\mathcal{A})$.
- 反过来, 往证 $m(\mathcal{A})$ 是 σ 代数, 且 $\supseteq \mathcal{A}$, 因此 $\supseteq \sigma(\mathcal{A})$.
- $m(\mathcal{A})$ 为单调系. 故, 只需验证 $m(\mathcal{A})$ 是代数.
- (1) 非空:

$$\mathcal{A} \text{ 是代数} \Rightarrow X \in \mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A}).$$

- (2) 补运算封闭: $\forall A \in m(\mathcal{A}), A^c \in m(\mathcal{A})$.
- 往证 $\mathcal{G} \supseteq m(\mathcal{A})$,

$$\mathcal{G} := \{A : A^c \in m(\mathcal{A})\}.$$

- 往证 \mathcal{G} 为单调系 且 $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{A}$ (\checkmark , 因为 \mathcal{A} 为代数).
- 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}, A_n \uparrow A$. 则

$$A_n^c \in m(\mathcal{A}), \forall n \Rightarrow A^c = \downarrow \lim_n A_n^c \in m(\mathcal{A}).$$

- 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}, A_n \downarrow A$. 则

$$A_n^c \in m(\mathcal{A}), \forall n \Rightarrow A^c = \uparrow \lim_n A_n^c \in m(\mathcal{A}).$$

- (3) 交运算封闭: $\forall A \in m(\mathcal{A}), \forall B \in m(\mathcal{A}), AB \in m(\mathcal{A})$.
- $\forall A \in m(\mathcal{A}), \forall B \in m(\mathcal{A}), AB \in m(\mathcal{A})$.
- 往证: (1) $\forall A \in \mathcal{A}, \star, \star$ 成立; (2) 满足 \star, \star 的 A 组成单调系.
- (1) 固定 $A \in \mathcal{A}$. 往证: $\forall B \in m(\mathcal{A}), AB \in m(\mathcal{A})$. 即
(1.1) $\forall B \in \mathcal{A}, \star$ 成立, \checkmark ; (1.2) 满足 \star 的 B 组成单调系.
- 引理: 若 \mathcal{M} 是单调系, 则 $\forall C, \mathcal{G}_C$ 是单调系, 其中

$$\mathcal{G}_C := \{D : CD \in \mathcal{M}\}.$$

- 引理的证明:

$$D_n \in \mathcal{G}_C, \forall n \text{ 且 } D_n \uparrow D \Rightarrow CD = \uparrow \lim_n CD_n \in \mathcal{M}.$$

$$D_n \in \mathcal{G}_C, \forall n \text{ 且 } D_n \downarrow D \Rightarrow CD = \downarrow \lim_n CD_n \in \mathcal{M}.$$

- (3) 交运算封闭: $\forall A \in m(\mathcal{A}), \forall B \in m(\mathcal{A}), AB \in m(\mathcal{A})$.
- $\forall A \in m(\mathcal{A}), \forall B \in m(\mathcal{A}), AB \in m(\mathcal{A})$.
- 往证: (1) $\forall A \in \mathcal{A}, \star, \star$ 成立; (2) 满足 \star, \star 的 A 组成单调系.
- (1) 固定 $A \in \mathcal{A}$. 往证: $\forall B \in m(\mathcal{A}), AB \in m(\mathcal{A})$. 即
(1.1) $\forall B \in \mathcal{A}, \star$ 成立, \checkmark ; (1.2) 满足 \star 的 B 组成单调系.
- 引理: $\mathcal{G}_C := \{D : CD \in \mathcal{M}\}$ 是单调系.
- 取 $\mathcal{M} = m(\mathcal{A}), C = A$. 改记 $D = B$, 知(1.2) \checkmark . 故(1) \checkmark .
- 取 $\mathcal{M} = m(\mathcal{A}), C = B$, 改记 $D = A$, 则满足 \star, \star 的 A 组成

$$\mathcal{G} = \bigcap_{B \in m(\mathcal{A})} \mathcal{G}_B.$$

- \mathcal{G}_B 都是单调系, 故 \mathcal{G} 是单调系, 即(2) \checkmark .

定理 (定理1.3.5, λ - π 定理)

若 \mathcal{P} 是 π 系, 则 $\sigma(\mathcal{P}) = l(\mathcal{P})$.

- $\sigma(\mathcal{P})$ 是 λ 系, 且 $\supseteq \mathcal{P}$, 因此 $\supseteq l(\mathcal{P})$.

反过来, 往证 $l(\mathcal{P})$ 是 σ 代数, 且 $\supseteq \mathcal{P}$, 因此 $\supseteq \sigma(\mathcal{P})$.

- 只需验证 $l(\mathcal{P})$ 是 π 系, 即, 对交运算 $A \cap B$ 封闭. 往证

$$AB \in l(\mathcal{P}), \quad \forall A \in l(\mathcal{P}), \forall B \in l(\mathcal{P}).$$

- 引理: 若 \mathcal{L} 是 λ 系, 则 $\forall C \in \mathcal{L}$, \mathcal{G}_C 是 λ 系.

$$\mathcal{G}_C := \{D : CD \in \mathcal{L}\}.$$

- (1) $\forall A \in \mathcal{P}$, \star, \star 成立:

(1.1) $\forall B \in \mathcal{P}$, \star 成立, \checkmark ; (1.2) \mathcal{G}_A 为 λ 系, \checkmark .

- 满足 \star, \star 的 A 组成 $\mathcal{G} = \bigcap_{A \in \mathcal{P}} \mathcal{G}_A$ 是 λ 系, 故 (2) \checkmark .

• 往证引理: $\mathcal{G}_C := \{D : CD \in \mathcal{L}\}, \forall C \in \mathcal{L}$.

• 复习 λ 系的定义:

$$X \in \mathcal{L}; \quad A, B \in \mathcal{L} \text{ 且 } A \supseteq B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{L};$$

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L} \text{ 且 } A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathcal{L}.$$

• (1) $X \in \mathcal{G}_C$, 因为 $CX = C \in \mathcal{L}$.

• (2) 若 $D_1, D_2 \in \mathcal{G}_C$ 且 $D_1 \supseteq D_2$, 则 $D_1 - D_2 \in \mathcal{G}_C$:

$$CD_1, CD_2 \in \mathcal{L}, CD_1 \supseteq CD_2 \Rightarrow C(D_1 - D_2) = CD_1 - CD_2 \in \mathcal{L}.$$

• (3) 若 $D_n \in \mathcal{G}_C, \forall n$ 且 $D_n \uparrow D$, 则 $D \in \mathcal{G}_C$:

$$CD_n \in \mathcal{L}, CD_n \uparrow \Rightarrow CD = \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} (CD_n) \in \mathcal{L}.$$

Borel 集.

- X 为拓扑空间, \mathcal{O} 为所有开集组成的集合系.
- 称 $\mathcal{B}_X := \sigma(\mathcal{O})$ 为 X 上的 Borel σ 代数/Borel 集合系.
若 $B \in \mathcal{B}_X$, 则称 B 为 Borel 集.
- 称 (X, \mathcal{B}_X) 为拓扑可测空间.

§1.4 可测映射与可测函数

- 映射, $f : X \rightarrow Y, x \mapsto y = f(x)$.
- y : 函数值, x 处的 f 值.
- 原像: $B \subseteq Y, \mathcal{E}$ 是 Y 上的集合系,

$$f^{-1}B := \{x : f(x) \in B\}, \quad \text{也记为 } f^{-1}(B), \{f \in B\},$$
$$f^{-1}\mathcal{E} := \{f^{-1}B : B \in \mathcal{E}\}.$$

- 命题1.4.1.

$$f^{-1}\emptyset = \emptyset, \quad f^{-1}Y = X,$$

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}B_1 \subseteq f^{-1}B_2, \quad (f^{-1}B)^c = f^{-1}(B^c),$$

$$f^{-1}\bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} f^{-1}A_t, \quad f^{-1}\bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} f^{-1}A_t.$$

命题 (命题1.4.2)

对 Y 上的任意非空集合系 \mathcal{E} ,

$$\sigma(f^{-1}\mathcal{E}) = f^{-1}\sigma(\mathcal{E}).$$

- 证: $f^{-1}\sigma(\mathcal{E})$ 是 σ 代数, 且 $\supseteq f^{-1}\mathcal{E}$, 从而 $\supseteq \sigma(f^{-1}\mathcal{E})$.

反过来, 往证 $f^{-1}\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(f^{-1}\mathcal{E})$, 即,

$$\forall B \in \sigma(\mathcal{E}) \text{ 都满足 } f^{-1}B \in \sigma(f^{-1}\mathcal{E}).$$

- 重点:** 往验证 \mathcal{G} 是 σ 代数. 它 $\supseteq \mathcal{E}$, 故 $\supseteq \sigma(\mathcal{E})$.

$$\mathcal{G} := \{B \subseteq Y : f^{-1}B \in \sigma(f^{-1}\mathcal{E})\}.$$

- 验证: $f^{-1}\emptyset = \emptyset, \quad f^{-1}Y = X,$

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}B_1 \subseteq f^{-1}B_2, \quad (f^{-1}B)^c = f^{-1}(B^c),$$

$$f^{-1}\bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} f^{-1}A_t, \quad f^{-1}\bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} f^{-1}A_t.$$

- 假设 (X, \mathcal{F}) 与 (Y, \mathcal{S}) 为两个可测空间, $f: X \rightarrow Y$.
- 若 $f^{-1}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$, 则称 f 为可测映射/随机元/可测的, 记为

$$f: (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{S}) \quad \text{或} \quad (X, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{S}) \quad \text{或} \quad f \in \mathcal{F}.$$

- f 可测指: $f^{-1}B \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{S}$. 等价地, $\sigma(f) \subseteq \mathcal{F}$, 其中,

$$\sigma(f) := f^{-1}\mathcal{S}$$

为使 f 可测的最小 σ 代数, 称为 f 生成的 σ 代数.

- 定理1.4.3. 设 \mathcal{E} 是 Y 上的非空集合系. 则

$$(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} (Y, \sigma(\mathcal{E})) \Leftrightarrow f^{-1}\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}.$$

- 定理1.4.4. 若 $(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{S}) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{L})$, 则 $g \circ f$ 可测.

- 证: $\forall C \in \mathcal{L}, g^{-1}C \in \mathcal{G}$, 故 $(g \circ f)^{-1}C = f^{-1}(g^{-1}C) \in \mathcal{F}$.

- 广义实数: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$.
- 序与区间: $-\infty < a < \infty, \forall a \in \mathbb{R}$; 如, $[-\infty, a]$.
- 四则运算: $\pm\infty \times 0 := 0$; 如, $\infty - \infty, \infty/\infty$ 无意义.
- 正部与负部: $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$a^+ = a \vee 0, \quad a^- = (-a) \vee 0.$$

- $a = a^+ - a^-, \quad |a| = a^+ + a^-.$
- 令

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} := \sigma(\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}).$$

- 命题1.4.5. $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma(\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}) = \dots$

- 定义1.4.1. 可测函数指

$$f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}).$$

随机变量指

$$f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}),$$

也称为有限的可测函数, 可测实值函数.

定理 (定理1.4.6)

(X, \mathcal{F}) 为可测空间.

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad (\text{或 } f : X \rightarrow \mathbb{R}),$$

则 f 为可测函数 (或随机变量 *r.v.*) 当且仅当

$$\{f \leq a\} \in \mathcal{F}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

- **r.v. 版:** 令 $\mathcal{E} = \mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \{(-\infty, a] : \forall a \in \mathbb{R}\}$. 则

$$f \text{ 可测} \quad \text{iff} \quad \sigma(f) = f^{-1}\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(f^{-1}\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}$$

$$\text{iff} \quad f^{-1}\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}.$$

- **可测函数版:** 令 $\mathcal{E} = \mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \{[-\infty, a] : \forall a \in \mathbb{R}\}$.

- 例1. $f : (X, \mathcal{F}_X) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ 可测.
- 例2. $f \equiv a$ 可测.
- 例3. 示性函数/指示函数 \mathbf{I}_A 可测, $\forall A \in \mathcal{F}$;
- 例4. 阶梯函数

$$a_1 \mathbf{I}_{A_1} + \cdots + a_n \mathbf{I}_{A_n}$$

可测, 其中, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ 两两不交, $a_1, \dots, a_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Borel 函数指 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.
- 例: 连续函数是Borel 函数.
- 例. 若 f 是r.v., g 是Borel 函数, 则 $g(f) = g \circ f$ 也是r.v..
- 推论1.4.7. 若 f, g 是可测函数, 则 $\{f = a\}, \{f < g\}, \dots \in \mathcal{F}$.

§1.5 可测函数的运算

定理 (定理1.5.1)

可测函数的四则运算(若有意义, 则)可测.

• 如: 若 f, g 可测, $f + g$ 不出现 $\infty + (-\infty)$ 情形, 则 $f + g$ 可测.

• 证: $\forall a \in \mathbb{R}, \{f + g < a\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$

$$A_1 := \{f = -\infty, g < \infty\} \cup \{f < \infty, g = -\infty\} \in \mathcal{F},$$

$$A_2 := A \cap (\{f = \infty, g > -\infty\} \cup \{f > -\infty, g = \infty\}) = \emptyset \in \mathcal{F},$$

$$A_3 := A \cap \{-\infty < f, g < \infty\} = \{f < a - g\} \cap \star$$

$$= \left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{f < r\} \cap \{r < a - g\}) \right) \cap \star \in \mathcal{F}.$$

定理 (定理1.5.2)

可测函数的极值与上、下极限都可测.

- 极值: 如, 若 f_1, f_2, \dots 可测, 则 $\inf_{n \geq 1} f_n$ 可测, 因为

$$\left\{ \inf_{n \geq 1} f_n \geq a \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq a\}.$$

- 注: $\left\{ \inf_{n \geq 1} f_n > a \right\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n > a\} \subseteq \left\{ \inf_{n \geq 1} f_n \geq a \right\}.$
- 特别地, f 可测, 则 $f^+ = f \vee 0$ 与 $f^- = (-f) \vee 0$ 可测.
- 极限:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_{N \geq 1} \inf_{n \geq N} f_n.$$

- X 的有限分割指: $\{A_1, \dots, A_n\}$ 满足

$$A_1, \dots, A_n \subseteq X, \text{ 两两不交, 且 } \bigcup_{i=1}^n A_i = X.$$

- (X, \mathcal{F}) 的有限可测分割指:

$$\text{进一步, } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}.$$

- 简单函数指:

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{I}_{A_i},$$

其中, $\{A_1, \dots, A_n\}$ 为有限可测分割, a_1, \dots, a_n 是实数.

- 有界函数指: $|f(x)| \leq M, \forall x \in X.$

- 点点收敛 $f_n \rightarrow f$ 指:

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \forall x \in X.$$

定理 (定理1.5.3)

若 f 可测, 则存在简单的 f_1, f_2, \dots 使 $f_n \rightarrow f$. (a) 若 $f \geq 0$, 则 $f_n \geq 0, \forall n$ 且 $f_n \uparrow f$; (b) 若 f 有界, 则 $f_n \rightrightarrows f$.

- 设 $f \geq 0$. 取

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{I}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbf{I}_{\{f \geq n\}}.$$

- $f_n \geq 0, f_n \uparrow$. 并且 $f_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \in X$, 因为

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 1/2^n, \quad \text{当 } f(x) < n;$$

$$n = f_n(x) \leq f(x), \quad \text{当 } f(x) \geq n.$$

- 又若 f 有界 M , 则 $\star, \forall n \geq M$, 故 $f_n \rightrightarrows f$.

- f 可测, 则 $f = f^+ - f^-$, 考虑 f^\pm 即可.

定理 (定理1.5.4)

设 $g : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$. 则

$(X, g^{-1}\mathcal{S}) \xrightarrow{h} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ iff $h = f \circ g$, 其中, $(Y, \mathcal{S}) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

- 注: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ 可改为 $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ 或 $([a, b], [a, b] \cap \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.
- $\Leftarrow \checkmark$, 往证 \Rightarrow .
- **典型方法:** 为证 $\star\star$, $\forall h \in g^{-1}\mathcal{S}$, 往依次验证 $\star\star$, $\forall h \in \mathcal{H}_i$:

\mathcal{H}_1 : 示性函数; $h = \mathbf{I}_A, \forall A \in g^{-1}\mathcal{S}$;

\mathcal{H}_2 : 非负简单函数; $h = a_1 \mathbf{I}_{A_1} + \cdots + a_n \mathbf{I}_{A_n}, a_i \geq 0; \forall i$;

\mathcal{H}_3 : 非负可测函数; $h_n \uparrow h$;

\mathcal{H}_4 : 可测函数; $h = h^+ - h^-$.

- 注: $\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3$, 需 $\star\star$ 对**非负**线性运算封闭, 极限封闭.

定理 (定理1.5.4 之必要性)

$(X, \mathcal{G}^{-1}\mathcal{S}) \xrightarrow{h} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \Rightarrow h = f \circ g$, 其中, $(Y, \mathcal{S}) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.

- \mathcal{H}_1 : 设 $h = \mathbf{I}_A$, 其中 $A \in \sigma(g)$. 则

$$A = g^{-1}B, B \in \mathcal{S} \Rightarrow f = \mathbf{I}_B \text{ 即可.}$$

- \mathcal{H}_2 : 设 h 非负简单, 即, $h = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{I}_{A_i}$,
其中 $\{A_1, \dots, A_n\}$ 为可测分割, a_1, \dots, a_n 两两不等. 则

$$\exists B_i \in \mathcal{S} \text{ 使 } A_i = \{h = a_i\} = g^{-1}B_i \Rightarrow h = \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{I}_{B_i} \right) \circ g.$$

- \mathcal{H}_3 : 设 h 非负可测. $\exists h_n$ 非负简单, $h_n \uparrow h$.

$$h_n = f_n \circ g, \forall n \Rightarrow h = f \circ g,$$

$$\text{其中, } f(y) := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y), & \text{若极限存在且有限,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- \mathcal{H}_4 : 设 h 可测, 则 $h = h^+ - h^- = (f_+ - f_-) \circ g$.

- 一般地, 为验证 $\star\star$, $\forall h \in \mathcal{H}_1$. 即, $h = \mathbf{I}_A$, $\forall A \in \mathcal{F}$. 往验证:

$$\mathcal{G} := \{A \subseteq X : \mathbf{I}_A \text{ 满足 } \star\star\} \supseteq \mathcal{F}.$$

- 找代数 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ 使得 $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$, 并证明 \mathcal{G} 是单调系.
- 或, 找 π 系 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{G}$ 使得 $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P})$, 并证明 \mathcal{G} 是 λ 系.

- 非负广义实值函数组成的单调类指:

$$f, g \in \mathcal{M}, a, b \in \mathbb{R}, af + bg \geq 0 \Rightarrow af + bg \in \mathcal{M};$$

$$f_1, f_2, \dots \in \mathcal{M}, f_n \uparrow f \Rightarrow f \in \mathcal{M}.$$

- 定理1.5.5. 设 \mathcal{A} 是代数, \mathcal{M} 是 $\star\star$. 若 $\mathbf{I}_A \in \mathcal{M}, \forall A \in \mathcal{A}$, 则 $(X, \sigma(\mathcal{A}))$ 上的非负可测函数均在 \mathcal{M} 中.
- $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{M}$: \mathcal{G} 是单调系,

$$\mathcal{G} := \{A \subseteq X : \mathbf{I}_A \in \mathcal{M}\} \supseteq \mathcal{A} \implies \mathcal{G} \supseteq \sigma(\mathcal{A}).$$

- $\rightarrow \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3$: \mathcal{M} 对非负线性运算封闭.

- 非负广义实值函数组成的 λ 类指:

$$1 \in \mathcal{L};$$

$$f, g \in \mathcal{L}, a, b \in \mathbb{R}, af + bg \geq 0 \Rightarrow af + bg \in \mathcal{M};$$

$$f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}, f_n \uparrow f \Rightarrow f \in \mathcal{L}.$$

- 定理1.5.6. 设 \mathcal{P} 是 π 系, \mathcal{L} 是 $\star\star$. 若 $\mathbf{I}_A \in \mathcal{L}, \forall A \in \mathcal{P}$, 则 $(X, \sigma(\mathcal{P}))$ 上的非负可测函数均在 \mathcal{L} 中.
- $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{M}$: \mathcal{G} 是 λ 系,

$$\mathcal{G} := \{A \subseteq X : \mathbf{I}_A \in \mathcal{L}\} \supseteq \mathcal{P} \implies \mathcal{G} \supseteq \sigma(\mathcal{P}).$$

- $\rightarrow \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3$: \mathcal{L} 对非负线性运算封闭.