§1.1. 随机事件及其概率

- 例1.4. 投掷一枚匀称的硬币, 出现国徽朝上.
- 随机试验: 在一组条件S 下/在特定环境中发出某个动作. 关心(可能发生也可能不发生的)事件发生的可能性.
- 例1.4(续). 共有两种不同的结果:

$$\text{国徽朝上(对应事件}A\text{)};\quad \text{国徽朝下}.$$

- 例1.2. 从一批含有次品的产品中随便抽一件, 遇到次品.

事件A 的概率$P(A)$:

- 事件的频率(客观):

  例. 投n 次硬币, 出现μ 次正面, 则$\frac{\mu}{n} \overset{n很大}{\approx} p$.

  频率$\frac{\mu}{n}$ 可作为概率p 的数值模拟(书P3 注1).

表 1.1.1 掷硬币的实验记录

实验者	投掷次数	出现国徽朝上的次数	频率(μ/n)
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

- 事件的置信度(主观):

  信念, 把握, 经验, 预测.

  大概率事件发生, 小概率事件不发生.

  “置信度”可作为假设.

§1.3 古典概型

- 古典概型: 在随机试验中, 总共有n 种不同结果,

  出现的机会均等.

- $A_i =$ "出现第i 种结果" :

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

- 称$A_1, \cdots, A_n$ 为(等概)基本事件, 具有:

  完全性、不相容性、等概性(对称性).

- 若事件A 由m 个基本事件组成, 则

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

- 关键: 不重不漏地数数.

  工具: 组合数, 例如, $C_n^k := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

例3.1. 同时投掷两颗骰子, 求: 得到(总和) 7 点的概率.

- 建模: 甲、乙两颗, 甲的点数为i, 乙的点数为j, 总共$6 \times 6 = 36$ 种不同结果.
- $A =$ "得到7 点" 含6 种结果:

$$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1).$$

- $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

例3.3. 有$N(\geqslant 2)$ 个阄, 其中$m(< N)$ 个内含“有”字. N 位同学排队依次任取一阄. 求: 排第i 位的同学取到有字阄的概率.

- 建模: 将阄编号, 有字$1 \sim m$, 剩余$m+1 \sim N$.
- 总共$N!$ 种不同结果:

$(a_1, \cdots, a_N)$ 表示第j 个人抽到编号为a_j 的阄, $j = 1, \cdots, N$.

- $A =$“第i 位同学取到有字阄”, 即$a_i \in \{1, \cdots, m\}$,
- A 中含$m(N-1)!$ 个基本事件, 于是

$$P(A) = \frac{m(N-1)!}{N!} = \frac{m}{N}.$$

- 抓阄结果与排队次序无关.

例3.5 设有一批产品, 共100 件, 其中5 件次品(不合格产品). 现在从中任取50 件, 求: 恰好取到2 件次品的概率.

- 建模: 将合格品编号$1 \sim 95$, 次品编号$96 \sim 100$.
- 总共C_{100}^{50} 种不同结果. 例如, $\{a_1, \cdots, a_{50}\}$.
- $A =$"恰好取到2件次品", 含$C_{95}^{48}C_5^2$ 个基本事件. 因此,

$$P(A) = \frac{C_{95}^{48}C_5^2}{C_{100}^{50}}.$$

- 例3.6. 一般地, N 件产品中含n 件次品, 任取m 件, $A =$ “恰好取到r 件次品”. 则

$$P(A) = \frac{C_{N-n}^{m-r} C_n^r}{C_N^m}.$$

- 定理3.1. 更一般地, N 件产品分k 类, 第i 类有N_i 件($N_1 + \cdots + N_k = N$). 从中任取m 件, $A =$ “第i 类恰有m_i 件, $i = 1, \cdots, k$” $(m_1 + \cdots + m_k = m)$. 则

$$P(A) = \frac{C_{N_1}^{m_1} \cdots C_{N_k}^{m_k}}{C_N^m}.$$

§1.4. 概率的公理化定义和性质

例4.1. 投掷两枚分币.

- 建模: 用H 表示正面(国徽)朝上, (Head);
  用T 表示反面朝上, (Tail).
- 共有4 种不同结果:

$$\omega_1 = HH, \quad \omega_2 = HT, \quad \omega_3 = TH, \quad \omega_4 = TT.$$

- $A =$ "恰有一枚正面朝上" $= \{\omega_2, \omega_3\}$;
  $B =$ "至少一枚正面朝上" $= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$;
  $C =$ "恰好两枚正面朝上" $= \{\omega_1\}$.

- 样本(sample): 试验结果, 元素, 记为ω.
- 样本空间: 所有试验结果组成的集合, 记为Ω.
- 事件(event): 部分试验结果, Ω 的子集, 记为A, B, ...
- 空集$\varnothing$.
- 事件发生: (本次)试验结果$\omega \in A$;

- “并”, $A \cup B$: 事件A 发生或事件B 发生.
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, 某个事件$A_i$ 发生,

$$\{\omega : \exists\ 1 \leqslant i \leqslant n \text{ 使得} \omega \in A_i\}.$$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$,

$$\{\omega : \exists\ i \text{ 使得} \omega \in A_i\},$$

- “交”, $A \cap B$, AB : 事件A 发生且事件B 发生.
- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$: $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, $A_1 \cdots A_n$, 所有事件A_i 都发生

$$\{\omega : \forall i (1 \leqslant i \leqslant n) \text{ 都有} \omega \in A_i\}.$$

- $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$: $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$, $A_1 A_2 \cdots$,

$$\{\omega : \forall i \geqslant 1 \text{ 都有} \omega \in A_i\}.$$

- “补”, A^c: 事件A 不发生, 余集, 对立事件.
- “差”, $A\backslash B := AB^c$.
- 交换律、结合律、分配律. 例,

$$A \cap (B \cup C) = (AB) \cup (AC).$$

- 对偶律. 例,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

- 例. 若$\Omega = [0,1]$, $A_i = [\frac{1}{i}, 1]$, 则$A_i^c = [0, \frac{1}{i})$,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0,1], \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c = \{0\}.$$

定义4.8 & 4.9. $\mathscr{F}$ 由一些事件组成, 如果:

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$;

(2) 若$A \in \mathscr{F}$, 则$A^c \in \mathscr{F}$;

(3) 若$A_n \in \mathscr{F}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$;

则称$\mathscr{F}$ 是(Ω 中的) σ 代数.

进一步, 又若P 是$\mathscr{F}$ 上的函数.

(4) 非负性: $P(A) \geqslant 0$, $\forall A \in \mathscr{F}$;

(5) 规范性(归一化条件): $P(\Omega) = 1$;

(6) 可列可加性: 若$A_n \in \mathscr{F}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且两两不交, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

则称P 是($\mathscr{F}$ 上的) 概率; 称$P(A)$ 为A (发生)的概率;

称$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间.

定理4.2. 概率P 有如下性质:

- (1) $P(\varnothing)=0.$

推导: 取$A_n=\varnothing$, $\forall n$, 则$\infty\times P(\varnothing)=P(\varnothing)$, 从而$P(\varnothing)=0$.

- (3) 可加性: 若$A_1,\cdots,A_n$ 两两不交, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

推导: 取$A_m=\varnothing$, $\forall m\geqslant n+1$ 即可.

- (2) $P(A^c)=1-P(A).$

推导: 取$A_1=A$, $A_2=A^c$, $A_n=\varnothing$, $\forall n\geqslant 3$ 即可.

- (4) 单调性: 若$A\subset B$, 则

$$P(B)\geqslant P(A),\quad P(B\backslash A)=P(B)-P(A),\quad 0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

推导: $P(B)=P(A)+P(B\backslash A)\geqslant P(A)$.

- (5) 连续性: 若$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

推导: 取$B_1 = A_1$, $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$, $n \geqslant 2$. 则, $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, 且$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.
于是, 左$= P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \overset{\text{可列可加性}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$

$\overset{\text{可加性}}{=} \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) =$ 右.

- (6) 连续性: 若$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, 则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

推导: 对A_n^c, $n \geqslant 1$ 使用(5).

- (7) 次可列可加性: $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

推导：取$B_1 = A_1$，$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$，$n \geqslant 2$. 则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. 因此,

左$= P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \overset{\text{可列可加性}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \overset{\text{单调性}}{\leqslant}$ 右.

- 次有限可加性: $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

推导：在次可列可加性中取$A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$ 即可.

- 例. $n = 2$ 的情形.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - \underset{\sim\sim\sim}{P(AB)}.$$

- 定理3.2.(Jordan公式)

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j)$$
$$+ \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdots A_n).$$

例3.9. N 位学生, 排队参加口试. 设有n 个考签, 被抽到的考签用后随即放回, 求: “考试结束时有考签没被抽到”的概率.

- 建模: 考签编号$1 \sim n$. 共有n^N 种结果:

$$(a_1, \cdots, a_N) \text{ 表示第} i \text{ 位学生抽到} a_i \text{ 号考签.}$$

- $A_i =$ “第i 号考签未被抽到”.

  $A =$ “有考签没有被抽到” $= \bigcup_{i=1}^n A_i$.

- 对任意i, $P(A_i) = \frac{(n-1)^N}{n^N}$. 进一步, 对$i_1 < \cdots < i_k$,

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = \frac{(n-k)^N}{n^N}.$$

- 由Jordan 公式,

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k \frac{(n-k)^N}{n^N}.$$

例4.2 & 4.3 离散概率空间.

- $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 或$\{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$.
- $\mathscr{F}$ 由Ω 的所有子集组成.
- $p_i \geqslant 0$, $i = 1, \cdots, n$, 且$\sum_{i=1}^n p_i = 1$.
  或$i = 1, 2, \cdots$, 且$\sum_{i=1}^\infty p_i = 1$.
- $P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$.
- 例, 古典概型, $A_i = \{\omega_i\}$ 为等概基本事件, $i = 1, \cdots, n$.
- 例, 泊松分布列. $\lambda > 0$. $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$,

$$p_i = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots.$$

例5.1. 设盒中有3个白球、2个红球, 从中取出一个球, 发现是白球. 从剩下的4个球中任取一个, 求: 它还是白球的概率(记为p).

- 建模: 不放回抽样, 白球$1 \sim 3$, 红球$4, 5$. $\omega = (i, j)$.
- $A = \{\omega : i \leqslant 3\}$, $B = \{\omega : j \leqslant 3\}$.
-

	$(1,2)\surd$	$(1,3)\surd$	$(1,4)$	$(1,5)$
$(2,1)\surd$		$(2,3)\surd$	$(2,4)$	$(2,5)$
$(3,1)\surd$	$(3,2)\surd$		$(3,4)$	$(3,5)$
$(4,1)\surd$	$(4,2)\surd$	$(4,3)\surd$		$(4,5)$
$(5,1)\surd$	$(5,2)\surd$	$(5,3)\surd$	$(5,4)$	

- $p = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4}$, $p \neq \dfrac{3}{5} = P(B)$.

- 定义5.1. 假设$P(A)>0$. 称$\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为已知A 发生的条件下, B 的条件概率. 记为$P(B|A)$.
- 按照定义直接计算条件概率$P(B|A)$.
- 条件概率指“重新分配权重”: $P(B|A)$ vs $P(B)=P(B|\Omega)$. 给定A, 条件概率$P(\cdot|A)$: 满足概率定义的三个条件.
- 简化模型给出条件概率: 在假设A 发生时, 简化模型. 例5.1(续). 3白2红. $A=$一白, $B=$二白. (若) A 发生, 则第二次在2白2红中抽取, $P(B|A)=\frac{2}{4}$.

- 乘法公式:

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

- 定理5.1(一般乘法公式):

$$\begin{aligned} P(A_1 \cdots A_n) &= P(A_1 \cdots A_{n-1})P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}) = \cdots \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

例5.4. 将52张牌随机均分4堆, 求: 各堆都含Ace的概率.

- 解法一、分别将桃杏梅方Ace 称为A-1, A-2, A-3, A-4. 记 E_{k,i_k} = 第k 堆含A-i_k 但不含其它Ace.
- $E_{i_1i_2i_3i_4} = E_{1,i_1}E_{2,i_2}E_{3,i_3}E_{4,i_4}$,

$$P(E_{i_1i_2i_3i_4}) = \frac{C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}} \cdot \frac{C_{36}^{12}}{C_{39}^{13}} \cdot \frac{C_{24}^{12}}{C_{26}^{13}}, \quad i_1, i_2, i_3, i_4 \text{互不相等}$$

- 当(i_1, i_2, i_3, i_4) 取遍$1, 2, 3, 4$ 的全排时, 所有$E_{i_1i_2i_3i_4}$ 互不相交, 并起来为E. 因此,

$$P(E) = 4! \times \star\star = \frac{3 \times 2 \times 13^3}{51 \times 50 \times 49}.$$

- 解法二、记

  A_1 = 红心Ace与黑桃Ace不在一组;

  A_2 = 梅花Ace与红心Ace黑桃Ace都不在一组;

  A_3 = 方块Ace与其他Ace都不在一组.

- 则$E = A_1A_2A_3$.
- $P(A_1) = \frac{3\times13}{51}$, $P(A_2|A_1) = \frac{2\times13}{50}$, $P(A_3|A_1A_2) = \frac{13}{49}$.
- 因此,

$$P(E) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) = \frac{3\times2\times13^3}{51\times50\times49}.$$

- 定义5.2. 若$P(AB) = P(A)P(B)$, 则称A 与B (相互)独立.
- 直观含义: A 的发生不改变B 的概率, 即$P(B|A) = P(B)$.
- 应用一、判断A, B 是否相互独立. 例5.6.
- 应用二、假设A, B 相互独立. 例5.7.
- 定理5.2. 若A 与B 独立, 那么, A 与B^c 也独立.

  推论: 同理, A^c 与B 独立; 进一步, A^c 与B^c 独立.

  推论: 反过来, A 与B^c 独立, 则A 与B 独立. 类似地, $\cdots\cdots$.

例5.6. 盒中有5 个乒乓球, 3个新球, 2个旧球. 有放回地取两次, 每次随机取一个球. 令

$$A = \text{“第1次取到新球”}, \quad B = \text{“第2次取到新球”}.$$

问: A, B 独立吗?

- $P(B|A) = P(B) = \frac{3}{5}$.
  因此, $P(AB) = P(A)P(B)$, 即A 与B 独立.
- 若改为不放回地取两次呢?
- 则改为$P(B|A) = \frac{2}{4} \neq P(B)$.
  因此, $P(AB) \neq P(A)P(B)$, 即A 与B 不独立.

例. 甲、乙玩石头剪子布. 用A_0, A_2, A_5 分别表示甲出石头, 剪刀, 布; 类似地, 有B_0, B_2, B_5. 假设 $P(A_i) = P(B_j) = \frac{1}{3}$ 且A_i 与B_j 相互独立, $i, j = 0, 2, 5$.

令C = 甲赢. 研究$A = A_2$, $B = B_5$, C 的独立性.

- 假设等价于建立古典概型: $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{0, 2, 5\}\}$.

$$
\begin{array}{lll}
(0,0) & (0,2)_C & (0,5)_B \\
(2,0)_A & (2,2)_A & (2,5)_{A,B,C} \\
(5,0)_C & (5,2) & (5,5)_B
\end{array}
$$

- $P(C) = \frac{1}{3}$.
- $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{9}$. 故$A$ 与B 独立; A 与C 独立; B 与C 独立.
- 但是, $P(C|AB) = 1 \neq P(C)$.

- 定义5.3. 事件A, B, C 相互独立指:

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(AC) = P(A)P(C),$$
$$P(BC) = P(B)P(C); \quad P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

- 定义5.4. n 个事件$A_1, \cdots, A_n$ 相互独立指:

$$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}),$$

对任意$2 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ 都成立.

- 定理5.3. 例: 若$A_1, \cdots, A_4$ 相互独立且$P(A_1A_3) > 0$, 则$P(A_2|A_1A_3) = P(A_2)$.

- 习题一、19. 例: 若$A_1, \cdots, A_4$ 相互独立, 则, A_1^c, A_2, A_3^c, A_4 相互独立, A_2, A_3^c, A_4^c 相互独立.

例5.9. 假设每门高射炮击中敌机的概率为0.6. 现在若干门同时发射. 问: 若要以99% 的把握击中敌机, 需要配几门?

- 假设配n 门. 记A_i = "第i 门击中敌机" . 则

$$A = \text{“击中敌机”} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

- $A^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$, 因此,

$$P(A^c) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c) = 0.4^n.$$

- $P(A) = 1 - 0.4^n$. 要求$1 - 0.4^n \geqslant 0.99$, 即

$$n \geqslant \frac{\lg 0.01}{\lg 0.4} = \frac{2}{0.3979} = 5.026.$$

- 因此, 需要至少6 门高射炮.

§1.6 全概公式和逆概公式

- 定理6.1(全概公式): 假设$B_1, \cdots, B_n$ 是Ω 的分割(完备事件组; $P(B_i) > 0,\ \forall i$), 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i).$$

推导: $P(A) \overset{\text{可列可加}}{=} \sum_i P(AB_i) \overset{\text{乘法公式}}{=} \sum_i P(B_i)P(A|B_i)$.

- 可改为可列分割: $B_1, B_2, \cdots$.
- 分情况讨论!

例6.1. 甲、乙、丙三人射击敌机. 甲、乙、丙击中概率分别为: 0.4, 0.5, 0.7. 恰有0, 1, 2, 3 人击中时飞机坠毁概率分别为0, 0.2, 0.6, 1. 求: 飞机坠毁概率.

- $A =$ “飞机坠毁”, $B_i =$ “恰好i 人击中”.
- $P(B_0) = (1-0.4)(1-0.5)(1-0.7) = 0.09,$

  $P(B_1) = 0.4(1-0.5)(1-0.7) + (1-0.4)0.5(1-0.7)$

  $+(1-0.4)(1-0.5)0.7 = 0.36,$

  $P(B_2) = \cdots = 0.41,$

  $P(B_3) = 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.7 = 0.14.$
- $P(A|B_i)$ 依次为0, 0.2, 0.6, 1.
- $P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(B_i)P(A|B_i)$

  $= 0.09 \times 0 + 0.36 \times 0.2 + 0.41 \times 0.6 + 0.14 \times 1 = 0.458.$

- 定理6.2(逆概公式, Bayes公式):

  假设$B_1,\cdots,B_n$ 是Ω 的分割, $P(A)>0$. 则

$$P(B_k|A)=\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)},\quad k=1,\cdots,n$$

推导: $P(B_k|A)\overset{\text{条件概率}}{=}\frac{P(AB_k)}{P(A)}\overset{\text{乘法公式、全概公式}}{=}\frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$.

- 先验概率; 后验概率
- A 是显明的; $B_1,\cdots B_n$ 是隐藏的.

例6.8. 某艾滋病检测法的灵敏度如下:

假阴性的概率为0.05;　假阳性的概率为0.01.

已知某地区有0.001 比例人群被艾滋病感染, 检测出甲被感染.

求: 甲感染艾滋病的概率.

- 显明: T = 甲检测出被感染, T^c = 甲检测出健康;
- 隐藏: A = 甲被感染, A^c = 甲健康.
- 已知: $P(A) = 0.001 = p$, $P(A^c) = 1 - p$.

$$P(T|A) = 1 - 0.05,\ P(T|A^c) = 0.01.$$

- 逆概公式:

$$P(A|T) = \frac{P(A)P(T|A)}{P(A)P(T|A) + P(A^c)P(T|A^c)}$$
$$= \frac{0.95p}{0.95p + 0.01(1-p)} = \frac{0.95p}{0.94p + 0.01} \approx 0.087.$$

例7.4. 甲、乙两人比赛, 每局甲赢的概率为p, 乙赢的概率为$q=1-p$, 赢者得1分, 输者得0分. 累计多2 分者胜出. 求: 甲胜出的概率.

- $A=$"甲胜出", $B=$"头两局甲赢", $\tilde{B}=$"头两局乙赢", $C=$"头两局甲、乙各赢一局".
- $A=B\cup(CA)$, 于是

$$P(A)=P(B)+P(C)P(A|C)=P(B)+P(C)P(A).$$

- $P(B)=p^2$, $P(C)=2pq$.
- 解得:

$$P(A)=\frac{p^2}{1-2pq}=\frac{p^2}{p^2+q^2}=P(B|B\cup\tilde{B}).$$

例7.5. 甲、乙两人轮流投两颗骰子(甲先). 甲胜的目标: 投出(总和为) 6 点; 乙胜的目标: 投出(总和为) 7 点. 求: 甲胜的概率.

- 令A = “甲胜”, B = “甲第1次投出6 点”, C = “乙第1次投出7 点”.
- $A = B \cup (B^cC^cA)$, 于是

$$P(A) = P(B)+P(B^cC^c)P(A|B^cC^c) = P(B)+P(B^cC^c)P(A).$$

- $P(B) = \frac{5}{36}$, $P(B^cC^c) = (1-\frac{5}{36}) \times (1-\frac{6}{36}) = \frac{31}{36} \times \frac{5}{6}$.
- 解得:

$$P(A) = \frac{\frac{5}{36}}{1-\frac{31}{36}\times\frac{5}{6}} = \frac{30}{36\times 6 - 31\times 5} = \frac{30}{61}.$$