第三章、随机向量

§3.1 随机向量的概念

- 例1.3. 考察钢的硬度X 与含碳量Y, 含硫量Z 之间的关系.
- 定义1.1 & 1.1′. 设$X_1,\cdots,X_n$ 是同一个概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机变量, 则称

$$\xi=\vec{X}=(X_1,\cdots,X_n):\Omega\to\mathbb{R}^n,\ \omega\mapsto(X_1(\omega),\cdots,X_n(\omega))$$

为$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的(n 维)随机向量/变量.
- 定义1.2. n 维随机向量的函数指新变量 $Y=f(X_1,\cdots,X_n)$, 其中$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad (x_1,\cdots,x_n)\mapsto f(x_1,\cdots,x_n)$.
- 例1.6. 三维空间中的一个随机点(X,Y,Z) 与原点的距离为

$$f(X,Y,Z)=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

§3.2 二维随机向量的联合分布与边缘分布, §3.7 条件分布

- 定义2.1 & 2.2. 若$\xi=(X,Y)$ 取有限个或可列个“值”(二维向量), 则称ξ 为离散型.
- ξ 是离散型当且仅当X,Y 都是离散型.
- 定义2.2. 设X, Y 的可能值分别为x_i, y_j, 则称

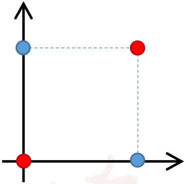
$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\quad i,j=1,2,\cdots$$

为ξ 的联合分布(列).

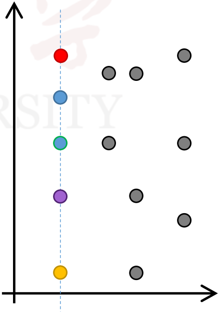
- 联合分布列满足: $p_{ij}\geqslant 0$, $i,j=1,2,\cdots$ (非负性);

$\sum_{i,j}p_{ij}=1$ (规范性).

- 定义2.3. 设$\xi = (X, Y)$, 则X 的分布称为ξ 关于X 的边缘分布. 关于Y 的边缘分布类似.



- 例2.5. $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{4}$,
  $P(\xi = (0,0)) = P(\xi = (1,1)) = \frac{1}{4} + \varepsilon$;
  $P(\xi = (0,1)) = P(\xi = (1,0)) = \frac{1}{4} - \varepsilon$.
  总有, $X, Y \sim B(1, \frac{1}{2})$.
- 给定i, 将
  $$P(Y = y_j | X = x_i), \ j = 1, 2, \cdots$$
  称为在$X = x_i$ 的条件下, Y 的条件分布(列); X 的条件分布类似. (7.3)



- 联合分布列$\Leftrightarrow$ 边缘分布列、条件分布列.

例2.2 & 2.3: 有大量粉笔, 含白、黄、红三种颜色, 比例分别为p_1, p_2, p_3. 从中抽取n 支. 求: 恰好抽到k_1 支白, k_2 支黄的概率.

- 设恰好抽到X 支白, Y 支黄, 即求$(X, Y) = (k_1, k_2)$ 的概率.
- 可以理解为放回抽样, 连续抽取n 次.
- 所求事件包含了

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} = \frac{n!}{k_1! k_2! (n - k_1 - k_2)!}$$

个基本事件, 其中, 每一个的概率都为

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k_1-k_2}.$$

- 故, $\forall k_1, k_2 \geqslant 0$, $k_1 + k_2 \leqslant n$,

$$P(X = k_1, Y = k_2) = C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k_1-k_2}.$$

- 称$\xi = (X, Y)$ 服从三项分布.

- $P(X=k_1,Y=k_2)=C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}p_1^{k_1}p_2^{k_2}p_3^{n-k_1-k_2}$.
- X 的边缘分布:

$$P(X=k_1)=\sum_{k_2=0}^{n-k_1}C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}p_1^{k_1}p_2^{k_2}p_3^{n-k_1-k_2}$$
$$=C_n^{k_1}p_1^{k_1}(1-p_1)^{n-k_1}.$$

- Y 的条件分布: 给定k_1,

$$P(Y=k_2|X=k_1)=\frac{P(X=k_1,Y=k_2)}{P(X=k_1)}=\frac{\star\star}{**}$$
$$=\quad C_{n-k_1}^{k_2}\left(\frac{p_2}{p_2+p_3}\right)^{k_2}\left(\frac{p_3}{p_2+p_3}\right)^{k_3},\quad k_2=0,1,\cdots,n-k_1.$$

2. 连续型情形

- 定义2.4. 设$\xi = (X, Y)$. 若存在$p(x,y)$ 使得

$$P(\xi \in D) = \iint_D p(x,y)dxdy,$$

对任意开矩形 D 成立, 则称ξ 为连续型随机向量, 称$p(x,y)$ 为ξ 的联合密度(函数), 也记为$p_{X,Y}(x,y)$.

- 联合密度满足:

$$p(x,y) \geqslant 0; \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} p(x,y)dxdy = 1.$$

- ★★ 对更一般的集合D 都成立, 例如, D 是单位圆盘.

- 定理2.1. 若$\xi=(X,Y)$ 是连续型, 则X,Y 都是连续型, 且

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{X,Y}(x,y)dy,\quad p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{X,Y}(x,y)dx.$$

- 称$p_X(\cdot)$ 与$p_Y(\cdot)$ 为ξ 的边缘密度.
- 给定y, 满足$p_Y(y)>0$. 称(关于x 的函数)

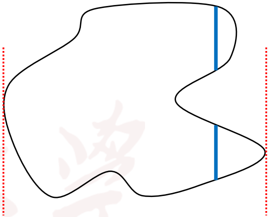
$$p_{X|Y}(x|y):=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)},\quad x\in\mathbb{R}$$

为在$Y=y$ 的条件下, X 的条件密度. (7.5)
- 联合密度$\Leftrightarrow$ 边缘密度、条件密度.

- 定义2.5. 假设G 是$\mathbb{R}^2$ 中面积为a 的区域. 若

$$P(\xi \in A) = \frac{A\text{的面积}}{G\text{的面积}}, \quad \forall\text{子区域}A,$$

则称ξ 服从G 上的均匀分布, 记为$\xi \sim U(G)$.



- 联合密度: $p(x, y) = \frac{1}{a}$, $(x, y) \in G$.
- 边缘密度:

$$p_X(x) = \frac{|G_{2,x}|}{a}, \quad x \in G_1,$$

其中, $G_{2,x} := \{y : (x, y) \in G\}$, $|G_{2,x}|$ 为其总长度;
$G_1 = \{x : |G_{2,x}| > 0\}$.

- 条件密度: $p_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{|G_{2,x}|}$, $y \in G_{2,x}$.
- $p_{Y|X}(y|x)$ 就是固定x, 将$p(x, y)$ 视为y 的函数归一化,

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{p_X(x)} p(x, y).$$

例2.7. G 为由$y=x^2$ 和$y=x$ 所围成的有限区域. $\xi\sim U(G)$.

求: ξ 的联合密度与边缘密度.

- G 的面积: $a=\int_0^1 xdx-\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{6}$.
- 联合密度: $p(x,y)=6,\quad (x,y)\in G$.
- 边缘密度:

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\int_{x^2}^{x}6dy=6(x-x^2),\quad 0<x<1.$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dx=\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx=6(\sqrt{y}-y),\quad 0<y<1.$$

- 条件密度: 固定$y\in(0,1)$,

$$p_{X|Y}(x|y)=\frac{1}{\sqrt{y}-y},\ \sqrt{y}\leqslant x\leqslant y.$$

- 注: X, Y 都取遍$(0,1)$, 但ξ 不能取遍$(0,1)\times(0,1)$.

- 定义2.6, 例2.8 & 例7.5. 若$\xi=(X,Y)$ 的联合密度$p(x,y)$ 有如下表达式, 则称ξ 服从二维(元)正态分布.

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{u^2+v^2-2\rho uv}{2(1-\rho^2)}\right\},$$

其中,

$$u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\quad v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2},$$

有5 个参数: $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$,

$\sigma_1,\sigma_2>0$,

$\rho\in(-1,1)$.

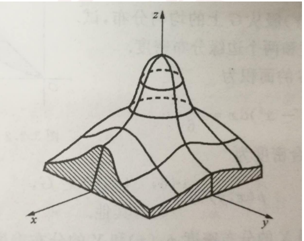


图 3.2.1 二维正态分布密度函数的图像

- 联合密度: $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$,

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{u^2+v^2-2\rho uv}{2(1-\rho^2)}\right\}.$$

- 边缘密度: $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)^2$. 例如,

$$\begin{aligned}
p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dv \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dv \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \sqrt{2\pi(1-\rho^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.
\end{aligned}$$

- 联合密度: $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$,

$$C \exp\left\{-\frac{u^2+v^2-2\rho uv}{2(1-\rho^2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}\right\}.$$

- 边缘密度: $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(1-\rho^2)u^2}{2(1-\rho^2)}}$.
- 条件密度:

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}.$$

- 另解:

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{p_X(x)} p(x,y) = \hat{C} \exp\left\{-\frac{(\frac{y-\mu_1}{\sigma_2}-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}.$$

例2.9. $\xi = (X, Y)$ 与$\eta = (U, V)$ 分别有联合密度

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad q(u,v) = 2p(u,v), \ uv > 0.$$

- ξ 服从二维正态分布, $X, Y \sim N(0,1)$, $\rho = 0$.
- η 不服从二维正态分布.
- 但$U, V \sim N(0,1)$. 例如, $\forall u > 0$,

$$\begin{aligned} p_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} q(u,v)dv = \int_0^{\infty} 2p(u,v)dv \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dv = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} \times \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}. \end{aligned}$$

- 注: U, V 都是正态变量, 不能推出(U, V) 是二维正态向量.

- 定义2.7. 称$F(x,y)=P(X\leqslant x, Y\leqslant y)$ 为(X,Y) 的联合分布函数, 也记为$F_{X,Y}(x,y)$.
- 联合分布函数的性质: “单调”、“规范”、右连续,

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geqslant 0;$$

$$\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,\quad \lim_{x,y\to\infty}F(x,y)=1.$$

- 连续型向量:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dvdu\Rightarrow p(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x,y).$$

§3.3 随机变量的独立性

- 定义3.1. 若对任意满足$a < b$ 且$c < d$ 的实数a, b, c, d, 都有

$$P(a < X < b, c < Y < d) = P(a < X < b)P(c < Y < d),$$

则称X 与Y 相互独立.

- 事实上, 对大量的$A, B \subseteq R$ 有

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

- 定理3.3. X, Y 相互独立当且仅当

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

- 定理3.1. 离散型, X, Y 相互独立当且仅当

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j).$$

- 定理3.2. 连续型, X, Y 相互独立当且仅当

$$p_{X,Y}(x,y)=p_X(x)p_Y(y).$$

- X 与Y 相互独立的充分条件:

  离散型:

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_iq_j,\quad P(Y=y_j|X=x_i)=q_j,\quad \forall i,j;$$

  连续型:

$$p_{X,Y}(x,y)=f(x)g(y),\quad p_{X|Y}(x|y)=f(x),\quad \forall x,y.\ (\text{推论3.1})$$

例3.1. (X,Y) 服从二维正态分布, $p_{X,Y}(x,y)$ 如下

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{u^2+v^2-2\rho uv}{2(1-\rho^2)}\right\},$$

其中,

$$u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},\quad v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2},$$

- 已有结论:

$$p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\},\quad p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}v^2\right\}.$$

- X,Y 相互独立当且仅当$\rho=0$.

§3.4 两个随机变量的函数

- 设$\xi=(X,Y)$ 有联合密度$p(x,y)$, 求$Z=f(X,Y)$ 的密度.
- 分布函数法: 第一步, 用$p(x,y)$ 表达F_Z,

$$F_Z(z)=P(f(X,Y)\leqslant z)=\iint_{\{(x,y):f(x,y)\leqslant z\}} p(x,y)dxdy.$$

- 第二步, 将$\star\star$ 化为如下积分,

$$\star\star=\int_{-\infty}^{z} p(u)du.$$

- 结论: $p_Z(z)=p(z)$.

例7.3. 假设X 与Y 相互独立, $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$.
令$Z = X + Y$. 求: Z 的分布; 在$Z = n$ 的条件下, X 的条件分布.

- $Z \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$: $\forall n \geqslant 0, \quad P(Z = n)$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2}$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \right) e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

- $n = 0$ 时, $P(X = 0 | Z = 0) = 1$.
- $n \geqslant 1$ 时, 记$p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, $q = 1 - p$. 则, $k = 0, 1, \cdots, n$,

$$P(X = k | Z = n) = \frac{C_n^k \lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

- 条件分布是二项分布.

例7.4. 假设X 与Y 相互独立, $X \sim B(n_1, p)$, $Y \sim B(n_2, p)$, $0 < p < 1$. 令$Z = X + Y$. 求: Z 的分布; 在$Z = n$ 的条件下, X 的条件分布.

- $n = 0, 1, \cdots, n_1 + n_2$. 记$q = 1 - p$, 则$P(Z = n)$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=0}^{n} C_{n_1}^{k} C_{n_2}^{n-k} p^{k+n-k} q^{n_1-k+n_2-(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_{n_1}^{k} C_{n_2}^{n-k} p^n q^{n_1+n_2-n} = C_{n_1+n_2}^{n} p^n q^{n_1+n_2-n}.$$

- $n = 0$ 时, $P(X = 0 | Z = 0) = 1$.
- $n \geqslant 1$ 时, $k = 0, 1, \cdots n$,

$$P(X = k | Z = n) = \frac{C_{n_1}^{k} C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^{n}}.$$

- 条件分布是超几何分布.

- 定理4.1. 设$\xi=(X,Y)$ 有联合密度$p(x,y)$, $Z=X+Y$. 则

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,z-x)dx.$$

- 证: 第一步,

$$F_Z(z)=P(X+Y\leqslant z)=\iint_{x+y\leqslant z}p(x,y)dxdy.$$

- 第二步,

$$\star=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-x}p(x,y)dy\right)dx=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty}p(x,u-x)dxdu$$

- 推论(系4.1): 若X, Y 相互独立, 分别有密度p_X, p_Y,
则$Z=X+Y$ 是连续型, 且

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)p_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(z-y)p_Y(y)dy.$$

例4.1 & 4.2. 设(X,Y) 服从二维正态分布, 联合密度$p(x,y)$ 为

$$p(x,y)=\hat{C}\exp\left\{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}\right\},\quad \left(u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right),$$

其中, $\hat{C}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$. 求$Z=X+Y$ 的密度.

- $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,z-x)dx$. 当$y$ 取$z-x$ 时,

$$v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}=\frac{z-(\mu_1+\sigma_1 u)-\mu_2}{\sigma_2}=C-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}u,$$

其中, $C=(z-\mu_1-\mu_2)/\sigma_2$.

- 此时, $u^2-2\rho uv+v^2$

$$\begin{aligned}&=u^2-2\rho u\left(C-\frac{\sigma_1 u}{\sigma_2}\right)+\left(C-\frac{\sigma_1 u}{\sigma_2}\right)^2\\&=\left(1+2\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}+\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2\right)u^2-2\left(\rho+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)Cu+C^2.\end{aligned}$$

- 目标: 计算$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,z-x)dx$. 已有:

$$p(x,z-x)=\hat{C}\exp\left\{-\frac{Au^2-2Bu+C^2}{2(1-\rho^2)}\right\},\quad 其中, u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1},$$

$$A=1+2\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}+\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2,\quad B=\left(\rho+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)C,\quad C=\frac{z-(\mu_1+\mu_2)}{\sigma_2}.$$

- 配方:

$$Au^2-2Bu+C^2=A\left(u-\frac{B}{A}\right)^2-\left(\frac{B^2}{A}-C^2\right).$$

- 于是, $p_Z(z)$

$$=\hat{C}\exp\left\{\frac{\frac{B^2}{A}-C^2}{2(1-\rho^2)}\right\}\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{A\left(u-\frac{B}{A}\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}\sigma_1du$$

$$=\tilde{C}\exp\left\{\frac{B^2-AC^2}{2(1-\rho^2)A}\right\}.\quad \tilde{C}=\hat{C}\sigma_1\sqrt{2\pi\frac{1-\rho^2}{A}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2A}}.$$

- 已有: $p_Z(z) = \tilde{C}\exp\left\{\frac{B^2-AC^2}{2(1-\rho^2)A}\right\}$, 其中$\tilde{C}$ 是常数,

$$A = 1+2\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}+\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2,\ B = \left(\rho+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)C,\ C = \frac{z-(\mu_1+\mu_2)}{\sigma_2}.$$

- $B^2 - AC^2$

$$= \left(\left(\rho+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 - A\right)C^2 = (\rho^2-1)\frac{(z-(\mu_1+\mu_2))^2}{\sigma_2^2}.$$

- 因此,

$$p_Z(z) = \tilde{C}\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

其中, $\mu = \mu_1+\mu_2$, $\sigma^2 = \sigma_2^2 A = \sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2$.

- 特别地, 若$\rho = 0$ (即X, Y 相互独立), 则

$$X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

- 定理4.2. 设(X,Y) 有联合密度$p(x,y)$.
  令$Z=X/Y$ (当$Y=0$ 时, 规定$Z=0$). 则Z 为连续型, 且

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|p(zy,y)dy.$$

- 证明: 第一步, $\frac{x}{y}\leqslant z$ 当且仅当 "$y>0$ 且$x\leqslant yz$" 或者 "$y<0$ 且$x\geqslant yz.$" 于是,

$$F_Z(z)=P(Y>0,X\leqslant Yz)+P(Y<0,X\geqslant Yz).$$

- $P(Y>0,X\leqslant Yz)$

$$=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{yz}p(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{z}p(yu,y)ydudy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left(\int_0^{\infty}yp(yu,y)dy\right)du.$$

- 类似处理⋆⋆, 即可.

例4.4. X, Y 相互独立, 都服从$N(0,1)$. 求$Z = X/Y$ 的密度.

- 联合密度:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\}.$$

- 因此,

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(zy, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{(zy)^2+y^2}{2}\right\} dy$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} y \exp\left\{-\frac{(z^2+1)y^2}{2}\right\} dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(z^2+1)u} du = \frac{1}{\pi(z^2+1)}.$$

- 定理4.3. 假设$\xi = (X, Y)$ 为连续型, 有密度$p(x, y)$.
  假设

$$\eta = (U, V), \qquad \text{其中 } U = f(X, Y), \quad V = g(X, Y).$$

如果(1) $P(\xi \in A) = 1$ 且$(f, g) : A \to G$ 是一对一的;

(2) $f,\ g \in C^1(A)$, 且$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0,\ \forall (x, y) \in A$,

那么, η 是连续型, 且

$$p_{U,V}(u, v) = p\Big(x(u, v), y(u, v)\Big)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|, \quad (u, v) \in G.$$

- 证: $\forall D \subseteq G$, 找$D^* \subseteq A$ 使得$\eta \in D$ iff $\xi \in D^*$. 于是,

$$P(\star) = P(\star) = \iint_{D^*} p(x, y)dxdy = \iint_{D} \star\star dudv.$$

例4.5, 4.7, & 习题三、21. 假设X, Y 相互独立, 都服从$N(0,1)$.

- 用极坐标表达:

$$X = R\cos\Theta, \quad Y = R\sin\Theta.$$

- $A = \{(x,y) : x \neq 0, y \neq 0\}$,

  $G = \{(r,\theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi;\ \theta \neq \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$.

- $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$

- $p_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|$

  $= \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{1}{2}r^2},\ r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi;\ \cancel{\theta \neq \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}}.$

- R, Θ 独立: $p_{R,\Theta}(r,\theta) = p_R(r) \cdot p_\Theta(\theta)$.

- $W := R^2 = X^2 + Y^2 \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$. 因为, $\forall w > 0$,

$$p_W(w) = p_R(r)\frac{dr}{dw} = r\exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\}\cdot\frac{1}{2r} = \frac{1}{2}e^{-\frac{w}{2}}.$$

- $U := e^{-\frac{1}{2}W} = G_W(W) \sim U(0,1)$. 因为, $\forall p \in (0,1)$,

$$P(U \leqslant p) = P(W \geqslant -2\ln p) = e^{-\frac{1}{2}(-2\ln p)} = e^{\ln p} = p.$$

- $V := \frac{1}{2\pi}\Theta \sim U(0,1)$, 且$U$ 与V 相互独立.
- $R = \sqrt{-2\ln U}$, $\Theta = 2\pi V$, 即

$$X = \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V), \quad Y = \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V).$$

2.两个随机变量的函数的数学期望

- 随机向量函数的期望(定理4.6):

$$离散型:Ef(X,Y)=\sum_{i,j}f(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j).$$

$$连续型:Ef(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)p(x,y)dxdy.$$

- $E(X+Y)=EX+EY.$ 例, 离散型的证明:

$$\begin{aligned}
Ef(X,Y) &= \sum_{i,j}(x_i+y_j)P(X=x_i,Y=y_j) \\
&= \sum_i x_i\sum_j P(X=x_i,Y=y_j)+\star \\
&= \sum_i x_iP(X=x_i)+\star = EX+EY.
\end{aligned}$$

- 定理4.4. 若X 与Y 相互独立, 则$EXY=(EX)\cdot(EY)$.
  例, 连续型的证明:

$$EXY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp_X(x)p_Y(y)dxdy=(EX)(EY).$$

- 定理4.5. 若X 与Y 相互独立, 则

$$\mathrm{var}(X+Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y).$$

- 证: 左$=E\left(X+Y-(EX+EY)\right)^2$
  $=$ 右$+2E(X-EX)(Y-EY)$.
- $X-EX$ 与$Y-EY$ 独立, 故
  $E(X-EX)(Y-EY)=E(X-EX)E(Y-EY)=0$.

§3.5 二维随机向量的数字特征

- 定义5.1. 假设X, Y 的方差存在, 则称

$$E(X-EX)(Y-EY)$$

为X 与Y 的协方差, 记为$\text{cov}(X,Y)$, σ_{XY}.
若$\sigma_{XY}=0$, 则称X 与Y 不(线性)相关.

- 注: 协方差存在, 因为

$$2|(X-EX)(Y-EY)| \leqslant (X-EX)^2+(Y-EY)^2.$$

- 计算公式: $\text{cov}(X,Y)=E(XY)-(EX)(EY)$.

- 定理5.1. 假设X, Y 的方差存在, 则

$$(\mathrm{cov}(X,Y))^2 \leqslant \mathrm{var}(X)\cdot \mathrm{var}(Y).$$

- 证: 若$\mathrm{var}(X)=0$, 则$X\equiv c$, 于是$\mathrm{cov}(X,Y)=0$.

  若$\mathrm{var}(X)>0$, 则$g(t)$ 的判别式$\leqslant 0$, 其中

$$\begin{aligned} g(t) :=& E\left(t(X-EX)+(Y-EY)\right)^2 \\ =& t^2\mathrm{var}(X)+2t\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{var}(Y)\geqslant 0. \end{aligned}$$

- 定义5.2. 设$0<\mathrm{var}(X), \mathrm{var}(Y)<\infty$, 则称

$$\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}$$

  为X 与Y 的相关系数, 记为ρ_{XY}, 简记为ρ.

- 定理5.2. (1) $|\rho| \leqslant 1$; (2) X 与Y 独立, 则不相关, 从而$\rho = 0$; (3) $|\rho| = 1$ 当且仅当存在a, b 使得$Y = a + bX$.
- 证(3): $|\rho| = 1$ 当且仅当$g(t)$ 的判别式为0, 即存在t_0 使得

$$
\begin{aligned}
g(t_0) =& E\left(t_0(X - EX) + (Y - EY)\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow & Y = -t_0 X + EY + t_0 EX.
\end{aligned}
$$

- 最优线性预测(定理5.3): 设$0 < \mathrm{var}(X), \mathrm{var}(Y) < \infty$, 则

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} E(Y - (a + bX))^2 = \mathrm{var}(Y)(1 - \rho_{XY}^2).$$

最小值点为:

$$b = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\mathrm{var}(X)}, \quad a = EY - bEX.$$

例5.2. 二维正态的密度:

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)} \qquad u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}.$$

- 已有: $\mu_1 = EX$, $\mu_2 = EY$, $\sigma_1^2 = \mathrm{var}(X)$, $\sigma_2^2 = \mathrm{var}(Y)$.
- $\rho_{X,Y} = \frac{E(X-\mu_1)(Y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} = E\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} uv \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)}dvdu.$$

- 先对v 积分, $v^2-2\rho uv+u^2 = (v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2$,

$$\star\star = e^{-\frac{u^2}{2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} ve^{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}}dv = e^{-\frac{u^2}{2}} \times \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\cdot\rho u.$$

- 再对u 积分,

$$\rho_{XY} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\rho u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}dx = \rho.$$

§3.6 n 维随机向量

- 定义6.1. 设$\xi=(X_1,\cdots,X_n)$ 是n 维向量, 称

$$F(x_1,\cdots,x_n)=P(X_1\leqslant x_1,\cdots,X_n\leqslant x_n),\quad x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}^n$$

为ξ 的联合分布函数, 也记为F_ξ 或$F_{X_1,\cdots,X_n}$.

- 定义6.2. 若ξ 取有限个或可列个“值”(n 维向量), 则称ξ 为离散型. (注: 当且仅当$X_1,\cdots,X_n$ 都是离散型.)

- 定义6.3. 若存在$p(x_1,\cdots,x_n)$ 使得对任意n 维矩形 D 都有

$$P(\xi\in D)=\underset{D}{\int\cdots\int}p(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n,$$

则称ξ 为连续型随机向量, 称$p(x_1,\cdots,x_n)$ 为ξ 的联合密度, 也记为$p_{X_1,\cdots,X_n}$. (注: ★★ 对一般的D 都成立.)

- 定义6.4. 对任意$1\leqslant k<n$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$, 则称$(X_{i_1},\cdots,X_{i_k})$ 为ξ 的(一个k 维)边缘, 其分布被称为ξ 的边缘分布.

例6.1 (多项分布). 模型: n 次独立重复试验(投掷一枚t 面骰子). 将第k 个面出现的次数记为X_k. 研究$(X_1,\cdots,X_t)$.

- 设$U_1,\cdots,U_n$ 相互独立, 都服从如下分布:
$$P(U_i=k)=p_k,\quad k=1,\cdots,t,$$
其中$t\geqslant 2$, $p_k>0$, $\forall k$ 且$p_1+\cdots+p_t=1$.
- $X_k=|\{1\leqslant i\leqslant n:U_i=k\}|=\sum\limits_{i=1}^{n}1_{\{U_i=k\}}$.
- $\xi=(X_1,\cdots,X_t)$ 的联合分布列:
$$P\left(\xi=(i_1,\cdots,i_t)\right)=\frac{n!}{i_1!\cdots i_t!}p_1^{i_1}\cdots p_t^{i_t}.$$
- 因为$X_t=n-\sum_{s=1}^{t-1}X_s$, 所以$\xi$ 与$(X_1,\cdots,X_{t-1})$ 等价.
- 任意边缘都服从多项分布.
例, (X_1,X_2) 服从三项分布; 特别地, X_k 服从二项分布:
$$若U_i=k,\ 则令V_i=1;\ 若U_i\neq k,\ 则令V_i=0.$$

- 定义6.5. 若对任意$a_i < b_i$, $i = 1, \cdots, n$ 都有

$$\begin{aligned} &P(a_1 < X_1 < b_1, \cdots, a_n < X_n < b_n) \\ =&P(a_1 < X_1 < b_1) \cdots P(a_n < X_n < b_n), \end{aligned}$$

  则称$X_1, \cdots, X_n$ 相互独立.
- 若$X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, 且$F_{X_i} = F_{X_1}$, $i = 2, \cdots, n$, 则称$X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布.
- 若相互独立, 则上式中的$a_i < X_i < b_i$ 可以改为$X_i \in B_i$.

- 相互独立的充要条件与充分条件:

$$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)= F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n)= f_1(x_1)\cdots f_n(x_n).$$

- 离散型:

$$P\left(X_1=x_{i_1}^{(1)},\cdots,X_n=x_{i_n}^{(n)}\right)$$
$$=P\left(X_1=x_{i_1}^{(1)}\right)\cdots P\left(X_n=x_{i_n}^{(n)}\right)= p_{i_1}^{(1)}\cdots p_{i_n}^{(n)}.$$

- 连续型(定理6.1):

$$p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)= p_{X_1}(x_1)\cdots p_{X_n}(x_n)= p_1(x_1)\cdots p_n(x_n).$$

- 若X_i 与X_j 相互独立, $\forall i\neq j$, 则称$X_1,\cdots,X_n$ 两两独立.
- 例. 甲、乙玩石头剪刀布. 甲出X, 乙出Y, 结局为Z.
  则X, Y, Z 两两独立, 但不相互独立.

- 定义6.6. 称$(EX_1, \cdots, EX_n)$ 为ξ 的期望, 记为$E\xi$.
- 定义6.7. 记$\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$, $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$.
  称$\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{n\times n}$, $\mathbf{R} = (\rho_{ij})_{n\times n}$ 为ξ 的协方差阵, 相关系数阵.
- 定义6.8. 若ξ 有如下的联合密度(其中, $\mathbf{\Sigma}$ 为正定矩阵), 则称ξ 服从n 维正态分布, 记为$\xi \sim N(\vec{\mu}, \mathbf{\Sigma})$.

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\mathbf{\Sigma}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})\mathbf{\Sigma}^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})^T\right\}.$$

- $n = 1$ 与$n = 2$ 的特例已介绍.
- $N(\vec{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ 的数字特征: $\mu_i = EX_i$, $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$.
- 边缘分布, 条件分布, 非退化线性变换后的分布都是正态.
- $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立当且仅当$\sigma_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$.

3. n 个随机变量的函数$Y = f(X_1, \cdots, X_n)$

- 定理6.2 (分布函数法):

$$F_Y(y) = P(f(\xi) \leqslant y) = \int \cdots \int_{f(x_1,\cdots,x_n)\leqslant y} p(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

- 定理6.3.

$$EY = \int \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) p(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

例6.3, 6.4, 定义6.9. 若X 与Y 独立, $X \sim \Gamma(r,\lambda)$, $Y \sim \Gamma(s,\lambda)$. 则

$$X+Y \sim \Gamma(r+s,\lambda).$$

- 密度:

$$p_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

- $Z = X+Y$: $p_Z(z) = \int p_X(x) p_Y(z-x) dx$. $\forall z > 0$,

$$p_Z(z) = C \int_0^z x^{r-1} e^{-\lambda x} \cdot (z-x)^{s-1} e^{-\lambda(z-x)} dx$$

$$= C e^{-\lambda z} \int_0^1 (tz)^{r-1} \left((1-t)z\right)^{s-1} d(tz) = \hat{C} z^{r+s-1} e^{-\lambda z}.$$

- 假设$X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布, 都服从$N(0,1)$.
- 由例2.5.2. $X_i^2\sim\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
- 于是, $S_n:=X_1^2+\cdots+X_n^2\sim\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$, 密度为

$$p_n(x)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{n/2-1}e^{-x/2},\quad x>0.$$

称为自由度为n 的卡方分布, 记为$\chi^2(n)$.

- 假设$Y_1,\cdots,Y_n$ 独立同分布, 都服从$\mathrm{Exp}(\lambda)=\Gamma(1,\lambda)$.
- 于是, $T_n:=Y_1+\cdots+Y_n\sim\Gamma(n,\lambda)$.
- 由例4.5. $X_1^2+X_2^2\sim\mathrm{Exp}(\frac{1}{2})$ 且$2\lambda Y_1\sim\mathrm{Exp}(\frac{1}{2})$ 知$2\lambda T_n\sim\chi^2(2n)$.

例6.6. N 件产品中有D 件次品. 随机抽n 件, 包含X 件次品. 求EX 与$\mathrm{var}(X)$. (其中, $N \geqslant n \geqslant 2$).

- 随机数目的分解: $X = X_1 + \cdots + X_n$, 其中

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第}i\text{ 件是次品}; \\ 0, & \text{若第}i\text{ 件是合格品}. \end{cases}$$

- 由期望的线性、伯努利分布的期望,

$$EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} P(\text{第}i\text{ 件是次品}) = n\frac{D}{N}.$$

- $EX = np$, 其中$p = \frac{D}{N}$.

- $\mathrm{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$. 根据对称性,

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 + \sum_{i \neq j} EX_iX_j = nEX_1^2 + n(n-1)EX_1X_2,$$

- 由乘法公式,

$$EX_1X_2 = P(\text{前两件都是次品}) = \frac{D}{N} \cdot \frac{D-1}{N-1}.$$

- 因此,

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) =& n\frac{D}{N} + n(n-1)\frac{D}{N} \cdot \frac{D-1}{N-1} - \left(n\frac{D}{N}\right)^2 \\ =& n\frac{D(N-D)}{N^2}\frac{N-n}{N-1}.\end{aligned}$$

- $\mathrm{var}(X) < np(1-p)$.

- 定理6.4. 设$\xi = (X_1, \cdots, X_n)$ 为连续型,

$$f: A \to G, \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (y_1, \cdots, y_n)$$

一对一, C^1 且$J = \frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \neq 0$. 则$\eta = (Y_1, \cdots, Y_n)$ 是连续型, 且

$$p_\eta(y_1, \cdots, y_n) = p_\xi(x_1, \cdots, x_n)|J^{-1}|, \ (y_1, \cdots, y_n) \in G.$$

- 定理6.5. 设$\xi=(X_1,\cdots,X_n)$ 的协方差阵为$\mathbf{\Sigma}$, $Y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j$, $j=1,\cdots,m$. 记$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 则$\eta=(Y_1,\cdots,Y_m)$ 的协方差阵为$\mathbf{A\Sigma A}^T$.
- 定理6.6. 进一步, 若$\xi\sim N(\vec{\mu},\mathbf{\Sigma})$, 则$\eta\sim N(\vec{\mu}\mathbf{A}^T,\mathbf{A\Sigma A}^T)$.
- 设$X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布, 将它们从小到大排列:

$$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)},$$

称$X_{(k)}$ 为第k 个顺序统计量.

例6.7. 设$X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布, 都服从$U(0,1)$.
求$EX_{(k)}$ 与$\mathrm{var}(X_{(k)})$.

- 方法一、$\forall 0 < x < 1$,

$$P(X_{(k)} \leqslant x) = \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i}.$$

- $k \leqslant i \leqslant n-1$, $\star\star'$

$$=\frac{n!}{i!(n-i)!}\left(ix^{i-1}(1-x)^{n-i} - x^i(n-i)(1-x)^{n-i-1}\right)$$

$$=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!}x^i(1-x)^{n-i-1}$$

$$=a_{i-1} - a_i,$$

- $i = n$ 时, $(x^n)' = a_{n-1}$, 于是, $\forall 0 < x < 1$,

$$p_{X_{(k)}}(x) = \sum_{i=k}^{n-1}(a_{i-1} - a_i) + nx^{n-1} = a_{k-1}.$$

- 已有$q_k(x) := p_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$.
- 归一化常数: $\forall \ell, m \geqslant 1$,

$$\int_0^1 x^\ell (1-x)^m dx = \frac{1}{\ell+1}\int_0^1 (1-x)^m dx^{\ell+1}$$
$$= -\frac{1}{\ell+1}\int_0^1 x^{\ell+1} d(1-x)^m = \frac{m}{\ell+1}\int_0^1 x^{\ell+1}(1-x)^{m-1}dx$$
$$= \cdots = \frac{m!}{(\ell+1)\cdots(\ell+m)}\int_0^1 x^{\ell+m}dx = \frac{\ell!m!}{(\ell+m+1)!}.$$

- 期望: 取$\ell = k$, $m = n-k$, 知

$$EX_{(k)} = \int_0^1 x q_k(x)dx = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1}.$$

- 已有$q_k(x) := p_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$.

$$\int_0^1 x^\ell (1-x)^m dx = \frac{\ell! m!}{(\ell+m+1)!}.$$

- 二阶矩: 取$\ell = k+1$, $m = n-k$,

$$EX_{(k)}^2 = \int_0^1 x^2 q_k(x) dx = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k} dx$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

- 方差:

$$\mathrm{var}(X_{(k)}) = EX_{(k)}^2 - \left(EX_{(k)}\right)^2 = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{k^2}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{k^2(n+1) + k(n+1) - k^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

- 方法二、记

$$Y_1 = X_{(1)}, \quad Y_k = X_{(k)} - X_{(k-1)},\ (2 \leqslant k \leqslant n), \quad Y_{n+1} = 1 - X_{(n)}.$$

- 不加证明地接受如下对称性*:

  对任意$1, \cdots, n+1$ 的全排$i_1, \cdots, i_{n+1}$, 都有

$$(Y_1, \cdots, Y_{n+1}) \text{ 与 } (Y_{i_1}, \cdots, Y_{i_{n+1}}) \text{ 同分布.}$$

- 期望: 注意到$S := Y_1 + \cdots + Y_{n+1} = 1$, 故

$$1 = ES = (n+1)EY_k \Rightarrow EY_k = \frac{1}{n+1}.$$

- $X_{(k)} = Y_1 + \cdots + Y_k$, 故

$$EX_{(k)} = \frac{k}{n+1}.$$

- Y_k 的方差：记$\sigma^2 := \mathrm{var}(Y_k) = \mathrm{var}(Y_{n+1}) = \mathrm{var}(X_{(n)})$.

$$F_n(x) := P(X_{(n)} \leqslant x) = x^n \Rightarrow q_n(x) = nx^{n-1},\ 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \int_0^1 nx^{n+1}dx - \left(\int_0^1 nx^n dx\right)^2$$

$$= \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

- 协方差：注意到$S := Y_1 + \cdots + Y_{n+1} = 1$，故$\mathrm{var}(S) = 0$.
- 记$\sigma_{12} = \mathrm{cov}(Y_1, Y_2)$.

$$\mathrm{var}(S) = (n+1)\sigma^2 + (n+1)n\sigma_{12} \Rightarrow \sigma_{12} = -\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$

- $X_{(k)}$ 的方差：

$$\mathrm{var}(X_{(k)}) = k\sigma^2 + k(k-1)\sigma_{12} = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}.$$