第四章、概率极限定理

§4.1 随机序列的收敛性

- 模型: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. 样本/点: $\omega \in \Omega$.
- 随机变量序列,

$$\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}, \; n = 1, 2, \cdots, \quad \eta : \Omega \to \mathbb{R}.$$

- 一列“可计算概率的”事件: 固定$\varepsilon > 0$, 对任意n,

$$A_n = A_{n,\varepsilon} := \{|\xi_n - \eta| \geqslant \varepsilon\} = \{\omega : |\xi_n(\omega) - \eta(\omega)| \geqslant \varepsilon\}.$$

- 定义1.1. 若

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\xi_n - \eta| \geqslant \varepsilon\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

则称ξ_n 依概率收敛于η, 记为$\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.

- 一个“无法计算概率的”事件:

$$A := \{\lim_{n\to\infty} \xi_n = \eta\} = \{\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \eta(\omega)\}.$$

- 定义1.2. 若

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \eta\right) = 1$$

则称ξ_n 几乎必然收敛于η, 记为$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$.

- 没有比较随机变量值的事件.
- 一列“刻画分布(函数)的”事件:

$$\{\xi_n \leqslant x\},\ n = 1, 2, \cdots .$$

- 定义1.3'. 若

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_n \leqslant x) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

且$\eta \sim N(0,1)$, 则称ξ_n 依分布收敛于η, 记为$\xi_n \xrightarrow{d} \eta$.

- 定义1.3. 若

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\eta(x), \quad \forall x \in C(F_\eta),$$

则称ξ_n 依分布收敛于η, 记为$\xi_n \xrightarrow{d} \eta$.

- 定理1.1. 若$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$, 则$\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.
- 令$A_n = \{|\xi_n - \eta| \geqslant \varepsilon\}$, 则(不加证明地接受)

$$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta \quad \text{当且仅当} \quad P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0,\ \forall \varepsilon > 0,$$

$$\xi_n \xrightarrow{P} \eta \quad \text{当且仅当} \quad P(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0,\ \forall \varepsilon > 0.$$

- 例1.1 表明$\xi_n \xrightarrow{P} \eta$ 不能推出 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$.
- 定理1.2. 若$\xi_n \xrightarrow{P} \eta$, 则$\xi_n \xrightarrow{d} \eta$.
- 例1.2 表明$\xi_n \xrightarrow{d} \eta$ 不能推出 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.

- 假设$X_1, X_2, \cdots$ 是随机变量序列, 令

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

- 定义1.4. 若EX_n, $n = 1, 2, \cdots$ 都存在, 且

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{P} 0,$$

则称$X_1, X_2, \cdots$ 服从(弱)大数律(Weak Law of Large Numbers, WLLN).

- 定义1.5. 若EX_n, $n = 1, 2, \cdots$ 都存在, 且

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0,$$

则称$X_1, X_2, \cdots$ 服从强大数律(SLLN).

- 定义1.6. 若EX_n, $\text{var}(X_n)$, $n=1,2,\cdots$ 都存在, $\text{var}(X_n)$ 不全为0, 且

$$S_n^* = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{var}(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1),$$

则称$X_1, X_2, \cdots$ 服从中心极限定理(Central Limit Theorem, CLT).

- 定义1.7. 若对任意$n \geqslant 2$ 都有$X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, 则称$X_1, X_2, \cdots$ 相互独立.
- 若$X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, 且$X_n \overset{d}{=} X_1$, $\forall n \geqslant 2$, 则称$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, 记为i.i.d. (independent and identically distributed).

定理 (Chebyshev's WLLN, 定理2.1)

假设$X_1, X_2, \cdots$ 相互独立，且$\mathrm{var}(X_i) \leqslant M$, $\forall i$. 那么,

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{P} 0.$$

- $\xi_n = \frac{1}{n}(S_n - ES_n), \quad \eta = 0.$
- 令$A_n = \{|\frac{1}{n}(S_n - ES_n)| \geqslant \varepsilon\}$. 需验证$P(A_n) \to 0$.
- 由切比雪夫不等式,

$$\begin{aligned} P(A_n) =& P(|S_n - ES_n| \geqslant n\varepsilon) \leqslant E\frac{(S_n - ES_n)^2}{(n\varepsilon)^2} \\ =& \frac{\mathrm{var}(S_n)}{(n\varepsilon)^2} \leqslant \frac{nM}{n^2\varepsilon^2} = \frac{M}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \to 0. \end{aligned}$$

- “相互独立”可减弱为“两两不相关”.

- 推论2.1. 设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, $\mathrm{var}(X_1) < \infty$, 则

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} EX_1.$$

- 推论2.2. 单次试验中A 发生的概率为p, 则

$$n \text{ 次试验中} A \text{ 发生的频率} \xrightarrow{P} p.$$

- 例2.1. 设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, 密度为$p(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$.
不加证明地接受: $\frac{S_n}{n}$ 与X_1 有相同的密度. 于是,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) = P(|X_1 - a| > \varepsilon) \quad \text{不趋于0.}$$

定理 (Cantelli's SLLN, 定理2.2, 引理2.1)

假设$X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, EX_i 存在, 且$E(X_i - EX_i)^4 \leqslant M$, $\forall i$. 那么,

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

- 不妨设$EX_i = 0$. 否则将$X_i - EX_i$ 视为新的X_i.
- 记$A_m = \{|\frac{1}{m}S_m| \geqslant \varepsilon\}$. 则仅需验证$P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \to 0$.
- 次可列可加性:

$$P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m).$$

- 4 阶 "切比雪夫" 不等式:

$$P(A_m) = P\left(S_m^4 \geqslant (m\varepsilon)^4\right) \leqslant \frac{1}{m^4\varepsilon^4} ES_m^4.$$

- 展开:

$$ES_m^4 = E\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right)^4 = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} EX_iX_jX_kX_\ell.$$

- 同类项: r, s, t, u 互不相等,

$$EX_r^4, EX_r^3X_s, EX_r^2X_s^2, EX_r^2X_sX_t, EX_rX_sX_tX_u.$$

- $EX_s = 0 \Rightarrow EX_r^3X_s = EX_r^2X_sX_t = EX_rX_sX_tX_u = 0.$
- $EX_r^4 \leqslant M$, 且

$$EX_r^2X_s^2 = \left(EX_r^2\right)\left(EX_s^2\right) \leqslant \sqrt{EX_r^4}\sqrt{EX_s^4} \leqslant M.$$

- 于是,

$$ES_m^4 \leqslant mM + C_m^2C_4^2M \leqslant 3m^2M.$$

$$\Rightarrow P(A_m) \leqslant \frac{3M}{\varepsilon^4} \times \frac{1}{m^2} \Rightarrow P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \to 0.$$

- 推论2.3. 设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, EX_1^4 存在, 则$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1$.
- 推论2.4. 单次小试验中事件A 发生的概率为p. 在独立重复试验中, 前n 次试验中A 发生的频率$\xrightarrow{\text{a.s.}} p$.
- 定理2.4. (Kolmogorov's SLLN). 假设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, 期望存在, 则$\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1$.
- 时间平均= 空间平均, (期望的含义).

应用(1): 统计方法的理论依据.

- 数据: $X_1, \cdots, X_n$ 为X 的n 次独立观测值, 它们独立同分布.
- 估计期望:

$$\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} EX.$$

- 估计方差:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{X})^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} EX^2 - (EX)^2 = \mathrm{var}(X).$$

应用(2): 计算机模拟期望、概率.

- 例2.3. 设有m 枚炮弹同时射击, 第i 枚炮弹落点为(x_i, y_i),

$$\varphi(x_1, y_1; \cdots; x_m, y_m) = \begin{cases} 1, & \text{若落点造成有效毁伤;} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

- 设第i 枚炮弹的瞄准点为(a_i, b_i), 实际落点(X_i, Y_i).
  模型假设: $X_1, \cdots, X_m; Y_1, \cdots, Y_m$ 相互独立, 且

$$X_i \sim N(a_i, \sigma_1^2), \quad Y_i \sim N(b_i, \sigma_2^2).$$

- SLLN:

$$P\big(\varphi(X_1, Y_1; \cdots; X_m, Y_m) = 1\big)$$
$$\approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(X_1^{(k)}, Y_1^{(k)}; \cdots; X_m^{(k)}, Y_m^{(k)}\right).$$

应用(3): 估计积分$I=\int_a^b f(x)dx$.

- $I=\int_0^1 f\big(a+(b-a)u\big)(b-a)du$, 因此不妨假设$a=0$, $b=1$.
- $I=\int_0^1 f(x)\cdot 1dx=Ef(U)$.
- SLLN:

$$I\approx\frac{1}{n}\left(f(U_1)+\cdots+f(U_n)\right).$$

- 定理3.1(Linderberg-Levy CLT). 假设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, $0 < \mathrm{var}(X_1) < \infty$. 那么,

$$S_n^* \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

- 应用:

$$P(S_n \leqslant x) = P(S_n^* \leqslant x^*) \approx \Phi(x^*) =: p,$$

其中,

$$x^* = \frac{x - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}. \quad (\mu = EX_1,\ \sigma^2 = \mathrm{var}(X_1).)$$

例3.1. 加法器同时收到20 个噪声电压V_k, $k = 1, \cdots, 20$, 它们独立同分布, $V_1 \sim U(0, 10)$. 记$V = \sum_{k=1}^{20} V_k$, 求$P(V > 105)$.

- 此题已知$n = 20$, $x = 105$, 求p.
- $EV_1 = 5$, $\mathrm{var}(V_1) = \frac{10^2}{12}$.
- 根据CLT,

$$P(V > 105) = P\left(V^* > x^*\right) \approx 1 - \Phi(x^*) =: p,$$

  其中,

$$x^* = \frac{105 - 20 * 5}{\sqrt{20 * \frac{100}{12}}}.$$

- 计算得$x^* \approx 0.387$. 查表得$\Phi(x^*) = 0.652$, 从而所求之$p = 1 - 0.652 = 0.348$.

例3.2. 旅馆有500间客房, 每间有一台2千瓦的空调. 入住率为80%. 问: 需多少千瓦的电力能有99% 的把握保证电力足够?

- 已知n, p, 求x. 假设提供x 千瓦.
- A_i = 第i 间房开空调, $P(A_i) = 80\%$, $X_i = 2 \times 1_{A_i}$. $n = 500$.
- $EX_1 = 2 \times 0.8 = 1.6$, $\mathrm{var}(X_1) = 2^2 \times 0.8 \times 0.2 = 0.64$.
- 要求x 满足: $P(S_n \leqslant x) \geqslant 99\% = p$. 根据CLT, 要求

$$P(S_n^* \leqslant x^*) \approx \Phi(x^*) \geqslant 0.99,$$

其中

$$x^* = \frac{x - 500 \times 2 \times 0.8}{\sqrt{500 \times 2^2 \times 0.8 \times 0.2}}.$$

- 查表得$\Phi(2.33) = 0.99$. 即, 要求$x^* \geqslant 2.33$.
  即, 要求$x \geqslant 800 + 2.33 * \sqrt{320} = 841.68$, 从而需842 千瓦.

例3.3. 桥的强度$Y \sim N(300, 40)$ (单位: 吨), 车的平均重量为5, 方差为2. 问: 为保证桥不出问题的概率不小于0.99997, 最多允许在桥上同时出现多少辆车?

- 已知x, $p = 0.99997$, 求n.
- 假设有n 辆车在桥上, 第i 辆的重量为X_i.
  模型假设$X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布, 且与Y 相互独立.
- 记$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, 保证$P(S_n \leqslant Y) \geqslant 0.99997$.
- 根据CLT 及独立性, 近似地,
  $S_n - Y \sim N(5n - 300, 2n + 40)$. 因此, 令$0^* = \frac{0-(5n-300)}{\sqrt{2n+40}}$, 有
  $$P(S_n \leqslant Y) = P(S_n - Y \leqslant 0) \approx \Phi(0^*).$$
- 要求$\Phi(0^*) \geqslant 0.9997$, 查表得$0^* \geqslant 4$, 即, $\frac{-(5n-300)}{\sqrt{2n+40}} \geqslant 4$,
  解得$n \leqslant 50.5$. 从而, 最多同时50 辆车.