

第一章、事件与概率

§1.1. 随机现象与统计规律性

- 不确定性.
- 例1. 投掷一枚硬币, 出现“正面朝上”.
- 例2. 投掷一枚色子, 出现“大”.
- 例3. 投掷两枚硬币, 出现“一正一反”.
- 随机试验(random trial), 不是“实验”.
- 事件(event). 常用大写字母 A, B, C, \dots 表示.
 - 例1. $A = \{H\}$
 - 例3. $A = \{HT, TH\}$
- 样本空间 Ω : 所有可能的试验结果组成的集合.
 - 例1. $\Omega = \{H, T\}$
 - 例3. $\Omega = \{HT, HH, TH, TT\}$

概率 $P(A)$ 的两个含义, 它们都不是概率的定义!

- 含义一、事件的频率(客观).
- 例. 投 n 次硬币, 观察到频率 $F_{n,H} := \frac{n_H}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$.

实验者	掷硬币次数	出现正面次数	频率
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

- 例. 观察到字母频率的稳定性.
- §5.4 强大数定律. 数值模拟.
- 性质: $F_n(A) \geq 0$; (1.1.1) $F_n(\Omega) = 1$; (1.1.2)
 $F_n(A) + F_n(B) = F_n(A + B)$. (1.1.3)

- 含义二、事件的置信度(主观).

- 经验.

- 假设, 预测, 判断.

(单次试验中)大概率事件发生, 小概率事件不发生.

- 权重.

§1.2 样本空间与事件

- 样本(sample)/点: 一个试验结果, ω .
- 样本空间/全集: 所有试验结果, Ω .
- 事件(event)/子集: 部分试验结果, A, B, \dots , 性质, Ω, \emptyset .
- 事件 A 发生: (本次)试验结果 $\omega \in A$.
- 概率(probability): 可能性, $P(A)$.
- 目标: 已知一些事件(的概率), 计算某事件(的概率).

- “交”， $A \cap B$, AB ：

事件 A 发生且事件 B 发生。

事件同时发生，性质都被满足。

- “并”， $A \cup B$ ：

事件 A 发生或事件 B 发生，

ω 满足性质 A 或性质 B 。

- $A \subseteq B$ ：若 $\omega \in A$ ，则 $\omega \in B$ 。

$A = B$ ： $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$ 。

- 不交， $AB = \emptyset$ ：不相容，互斥。

此时， $A \cup B$ 也记为 $A + B$ 。

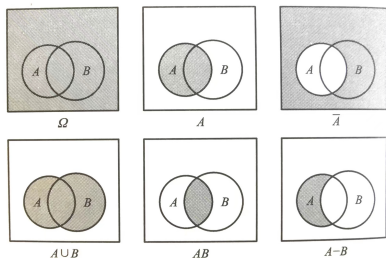


图 1.2.1 事件运算

- “补”， $\bar{A} = A^c = \{\omega : \omega \notin A\}$ ，
逆事件，对立事件，
事件 A 不发生，性质 A 被否定。

- “差”： $A \setminus B := A\bar{B}$ 。
当 $B \subseteq A$ 时，记为 $A - B$ 。

- 交换律、结合律、分配律。

- 对偶律： $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ， $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$ 。

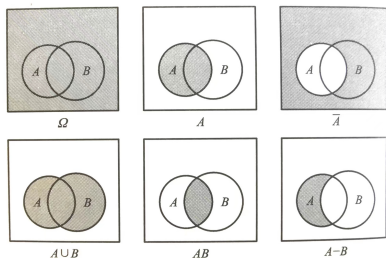


图 1.2.1 事件运算

- 有限交: A_1, \dots, A_n 全都发生.

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cdots A_n = \{\omega : \omega \in A_i, \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

- 有限并: A_1, \dots, A_n 中至少有一个发生.

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{\omega : \exists 1 \leq i \leq n \text{ 使得 } \omega \in A_i\}.$$

- 可列交: 所有事件 $A_i, i \geq 1$ 都发生.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_i A_i = A_1 A_2 \cdots := \{\omega : \omega \in A_i, \forall i\}.$$

- 可列并: 存在某个事件 A_i 发生.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_i A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots := \{\omega : \exists i \text{ 使得 } \omega \in A_i\}.$$

- 例. $A_i = [\frac{1}{i}, 1]$, 则 $\bigcup_i A_i = (0, 1]$.
- 例. $A_i = [0, \frac{1}{i}]$, 则 $\bigcap_i A_i = \{0\}$; $A_i = (0, \frac{1}{i}]$, 则 $\bigcap_i A_i = \emptyset$.
- 若 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_n B_n := \bigcup_n B_n.$$

- 若 $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_n B_n := \bigcap_n B_n.$$

- $\lim_n \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_i A_i$, $\lim_n \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_i A_i$.
- 交换律、结合律、**分配律**、**对偶律**:

$$(\bigcup_i A_i)C = \bigcup_i (A_i C); \quad (\bigcap_i A_i)C = \bigcap_i (A_i C).$$

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}.$$

§1.3 古典概型

- 有限样本空间: $\Omega = \{1, \dots, n\}$. 基本事件: $\{i\}$.

概率: $P(A) := \sum_{i \in A} p_i$; 其中 $p_i \geq 0, \forall i; \sum_i p_i = 1$.

含义: 权分配, $p_i, P(\{i\})$, 不要写 $P(i)$.

- 古典概率模型: $p_i = \frac{1}{n}$. 事件 A 的概率定义为 $P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$.

- “人人平等”的原则.

- 不重不漏地数数: 乘法/加法原则, 排列, 组合.

$$A_n^m = n(n-1) \cdots (n-m+1),$$

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

- 两类模型: 一、抽球模型, 二、放球模型.

第一类、抽球模型

1. 不放回抽样

例1.3.5. a 个黑球, b 个白球. 随机地一个一个取出来, 令 $A_k =$ “第 k 个是黑球”. 求: $P(A_k)$.

模型1:

- 将球编号, 黑球: $1 \sim a$, 白球: $a + 1 \sim a + b$.
- 样本: $\omega = (i_1, \dots, i_{a+b})$: $1 \sim a + b$ 的全排.

样本空间: $|\Omega| = (a + b)!$.

令 $A_k := \{\omega : i_k \leq a\}$. 求 $P(A_k)$.

- 抽签与顺序无关:

$$\psi : \Omega \rightarrow \Omega$$

$$\omega \mapsto \hat{\omega} = (i_k, i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_n). \text{ 一对一.}$$

- 一般化: $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ 是全排:

$$\omega \mapsto (i_{k_1}, i_{k_2}, \dots, i_{k_{a+b}}). \text{ 一对一.}$$

- 计算: $|A_k|$, 其中 $A_k = \{\omega : i_k \leq a\}$.

$$|A_k| = |A_1| = a(a+b-1)!, \quad \text{故 } P(A_k) = \frac{a}{a+b}.$$

模型2:

- 用1 表示黑球(a 个), 0 表示白球(b 个).

样本: $\tilde{\omega}$ = 由 a 个1 和 b 个0 组成的“0-1字符串”,

样本空间: $|\tilde{\Omega}| = C_{a+b}^a$.

- $\varphi: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$, $a! \cdot b!$ 对1 的映射,
 $\omega \in A_k$ iff $\varphi(\omega) \in \tilde{A}_k =$ 第 k 个字符为1 的所有字符串.
- 计算:

$$|\tilde{A}| = C_{a+b-1}^{a-1}, \quad \text{故 } \tilde{P}(\tilde{A}) = \frac{a}{a+b}.$$

- 模型1、模型2结果一样:

$$P(A) = |A_k|/|\Omega| = (a!b!|\tilde{A}_k|)/(a!b!|\tilde{\Omega}|) = \tilde{P}(\tilde{A}_k).$$

例1.3.6. a 个黑球, b 个白球. 随机地一个一个取出来, 令 $B =$ “前 n 个中恰有 k 个黑球”. 求: $P(B)$.

- 模型1: $|\Omega| = (a + b)!$.

$$\begin{aligned} |B| &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{a!}{(a-k)!} \frac{b!}{(b-(n-k))!} (a+b-n)! \\ &= n!(a+b-n)! C_a^k C_b^{n-k}. \end{aligned}$$

$$P(B) = C_a^k C_b^{n-k} / C_{a+b}^n.$$

- 模型3: 随机地(一次性)取 n 个. $|\hat{\Omega}| = C_{a+b}^n$. $|\hat{B}| = C_a^k C_b^{n-k}$.

$$\hat{P}(\hat{B}) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

- 模型1、模型3一致:

- $n!(a+b-n)!$ 对1的映射,

$$\hat{\varphi}: \Omega \rightarrow \hat{\Omega}, \quad \omega = (i_1, \dots, i_{a+b}) \mapsto \hat{\omega} := \hat{\varphi}(\omega) = \{i_1, \dots, i_n\}.$$

- $\omega \in B$ iff

$$\hat{\omega} \in \hat{B} = \{\hat{\omega} : |\hat{\omega} \cap \{1, \dots, a\}| = k\}.$$

- $\hat{\omega} \in \hat{B}$ iff $\hat{\omega} = \{a_1, \dots, a_k; b_1, \dots, b_{n-k}\}$. 故 $|\hat{B}| = C_a^k C_b^{n-k}$.

$$P(B) = \hat{P}(\hat{B}) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

2. 放回抽样

例1.3.6. a 个黑球, b 个白球. 每次随机地取一个, 然后放回, 令 $C =$ “前 n 个(次)中恰有 k 个黑球”. 求: $P(C)$.

模型4:

- 将球编号, 黑球: $1 \sim a$, 白球: $a + 1 \sim a + b$.
- 样本空间: $|\Omega| = (a + b)^n$, 样本:

$$\omega = (i_1, \dots, i_n) : 1 \leq i_k \leq a + b, \quad \forall k.$$

- 计算:

$$|C| = C_n^k a^k b^{n-k}, \quad P(C) = C_n^k \left(\frac{a}{a+b} \right)^k \left(\frac{b}{a+b} \right)^{n-k}.$$

- 例. 投公平硬币 n 次, 求 $\check{C} =$ “见到 k 个正面”的概率.

$$\check{\omega} = \text{长为 } n \text{ 的 } H-T \text{ 字符串, } |\check{\Omega}| = 2^n, \quad |\check{C}| = C_n^k, \quad (p = \frac{1}{2}).$$

第二类、放球模型

例：将两个球随机放入两个盒子中。

- 对比.

模型一	HH	TT	HT	TH
球可分辨	$[\otimes][\oplus]$	$[\otimes][\otimes]$	$[\otimes][\oplus]$	$[\oplus][\otimes]$

(翻译: 投两枚硬币, 盒子 H 与盒子 T)

模型二	001	100	010
球不可分辨	$[\odot][\odot]$	$[\odot][\odot]$	$[\odot][\odot]$

- 物理: 考虑将 r 个球放入 n 个盒子中.

Maxwell-Boltzmann 统计(模型一):

$$\Omega = \{(n_1, \dots, n_r) : 1 \leq n_i \leq n, 1 \leq i \leq r\}$$

Bose-Einstein 统计(模型二):

$$\Omega' = \{(r_1, r_2, \dots, r_n) : r_1 \geq 0, \dots, r_n \geq 0, \sum_{i=1}^n r_i = r\}$$

1. 球可分辨

例1.3.4. 有 n 个球, 随机地将每个球放入 N 个格子之一,
 A = “在 $1 \sim n$ 号格子中各有一个球”, B = “每个球独占一格”.
求 $P(A), P(B)$. ($N \geq n$)

● 建模: 将球编号, 盒子也编号, $\omega = (i_1, \dots, i_n)$, $|\Omega| = N^n$.

● $|A| = n!$, $|B| = C_N^n n! = \frac{N!}{(N-n)!}$, 故

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}, \quad P(B) = \frac{N!}{(N-n)!N^n}.$$

● 生日问题: $N = 365$, $p_n =$ 有同生日的概率($= 1 - P(B)$).

n	5	10	20	23	30	40	60
p_n	0.027	0.117	0.411	0.507	0.706	0.891	0.994

习题一、37. n 个学生, N 张考签, 依次抽取考签并放回.
记 $A =$ “有未被抽到的考签”, 求 $P(A)$.

- 翻译: 将 n 个球随机放入 N 个盒子, $A =$ “有空盒子”.
- $A_i =$ “第 i 个盒子空”, $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$.
- $|A_i| = (N-1)^n$, $|A_1 \cdots A_i| = (N-i)^n$.
- 若当(Jordan)公式:

$$\left| \bigcup_i A_i \right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i A_j A_k| \cdots$$

- $P(A) = (C_N^1(N-1)^n - C_N^2(N-2)^n + \cdots)/N^n$.

2. 球不可分辨

习题一、21. 从编号 $1, 2, \dots, N$ 的 N 个球从中有放回地摸了 n 次球, 每次一个, $A =$ “所见号码上升”, 求 $P(A)$.

- $|\Omega| = N^n, A = ?$
- A : 将 n 个不可分辨的球放入 N 个盒子, (例. $n = 6, N = 3$)

111233	[$\odot \odot \odot \color{red}{\parallel} \odot \color{blue}{\parallel} \odot \odot$]	000 $\color{red}{1}$ 0 $\color{blue}{1}$ 00
222233	[$\color{red}{\parallel} \odot \odot \odot \odot \color{blue}{\parallel} \odot \odot$]	$\color{red}{1}$ 0000 $\color{blue}{1}$ 00

- $|A| = C_{n+N-1}^n$, (有重复的组合数, P21 (4)), 故

$$P(A) = C_{n+N-1}^n / N^n$$

习题一、15. m 个男孩和 n 个女孩随机沿着圆桌坐下. ($n \leq m$)
 $A =$ “任意两个女孩都不相邻”, 求 $P(A)$.

- 初选模型: 全部编号, $\omega = 1 \sim n + m$ 的全排,
 $|\Omega| = (m + n)!$. 没有用!
- 圆桌: 先为第 $m + n$ 号男孩挑座位(记为 ω_0 号).
- 然后, 混排: 女孩全排, 男孩全排, 挑座位给女孩.
- $\omega = (\omega_0, \omega_g, \omega_b, \tilde{\omega})$,
 $(m + n)! = (m + n) \cdot n! \cdot (m - 1)! \cdot C_{n+m-1}^n$.
- 简化模型: 男孩=盒子, $|\tilde{\Omega}| = C_{m-1+n}^n$.
- $\omega \in A$ iff $\tilde{\omega} \in \tilde{A} =$ “每球独占一盒”, $|\tilde{A}| = C_m^n$,

$$P(A) = \tilde{P}(\tilde{A}) = \frac{C_m^n}{C_{m+n-1}^n} = \frac{m!(m-1)!}{(m-n)!(n+m-1)!}$$

- 先为第 n 号女孩挑座位(记为 ω_0 号).

- $n - 1$ 个女孩、 m 个男孩的混排.

- $\omega = (\omega_0, \omega_g, \omega_b, \tilde{\omega}),$

$$(m + n)! = (m + n) \cdot (n - 1)! \cdot m! \cdot C_{n+m-1}^{n-1}.$$

- 简化模型: 女孩=盒子, $|\hat{\Omega}| = C_{n-1+m}^{n-1}.$

- $\omega \in A$ iff $\hat{\omega} \in \hat{A}$ = “没有空盒子”.

- n 盒中放 $m - n$ 球的放法, $|\hat{A}| = C_{n-1+m-n}^{n-1},$

$$P(A) = \hat{P}(\hat{A}) = \frac{C_{m-1}^{n-1}}{C_{n+m-1}^{n-1}} = \frac{m!(m-1)!}{(m-n)!(n+m-1)!}.$$

例. 5 位男孩, 4 位女孩, 混排.

记 $B =$ “甲(男孩)排在所有女孩之前”, 求 $P(B)$.

- 建模: 女孩编号 1 ~ 4; 男孩编号 5 ~ 9, 其中, 甲为 5 号.

- 模型1: $|\Omega| = 9! = 4! \times 5! \times C_9^4$,

$$\omega = 835261497 \mapsto (3214; 85697; 010101100).$$

- 模型2:

$$\omega = 835261497 \mapsto (\hat{\omega} = 35214; 8697; 011101100).$$

- 简化模型: $\omega \mapsto \hat{\omega}$,

$$B \rightarrow \hat{B} = \{5* **\}, \quad P(B) = \hat{P}(\hat{B}) = \frac{1}{5}.$$

古典概型 $P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$, $\forall A \subseteq \Omega$ 的基本性质:

- 非负性: $P(A) \geq 0$.
- 规范性: $P(\Omega) = 1$, 归一化.
- 可加性: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

§1.4 几何概型

- 几何概率模型: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $|\Omega| < \infty$,

事件 A 的概率定义为

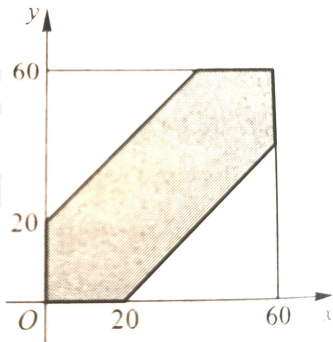
$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

- “人人平等”

例1.4.4. 两人约7~8点某地见, 到达后等20分钟离去.

$A =$ 两人能会面, 求: $P(A)$.

- $\omega = (x, y), 0 \leq x, y \leq 60$.
- $\omega \in A$ iff $|x - y| \leq 20$.
- $|\Omega| = 60^2$,
 $P(A) = |A| = 1 - (2/3)^2$.



贝特朗(Bertrand)悖论: 在单位圆周上随机取一条弦.

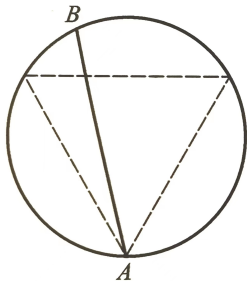
$A = \text{“弦长大于}\sqrt{3}\text{”}$, 求 $P(A)$.

• 解法一.

$$\Omega = S^1 = (0, 2\pi),$$

$$A = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$



- 解法二.

$$\Omega = B(0, 1),$$

$$A = B(0, \frac{1}{2}),$$

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$

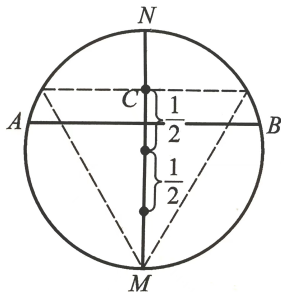
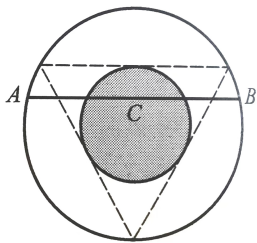
- 解法三.

$$\Omega = (0, 1),$$

$$A = [0, \frac{1}{2}),$$

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

- 随机取.



古典/几何概型 $P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$, “ $\forall A \subseteq \Omega$ ” 的性质:

- 非负性: $P(A) \geq 0$.
- 规范性: $P(\Omega) = 1$, 归一化.
- 可加性: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

- 连续性: 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, 则

$$P\left(\lim_n A_n\right) = \lim_n P(A_n).$$

§1.5. 概率空间

- 基本假设: 非负性 $P(A) \geq 0$,

归一化 $P(\Omega) = 1$.

- 直观要求: 有限可加性 $P(A + B) = P(A) + P(B)$,

连续性 $\lim_n P(A_n) = P(\lim_n A_n)$.

- 在基本假设下, 直观要求等价于可列可加性:

若 A_1, A_2, \dots 互不相容(即两两不相容, 或两两不相交), 则

$$P\left(\sum_n A_n\right) = \sum_n P(A_n).$$

在基本假设下, 有限可加性、连续性蕴含着:

- $P(\emptyset) = 0$, 有限可加性.
- 可列可加性: 若 A_1, A_2, \dots 两两不交, 则

$$\begin{aligned}\sum_n P(A_n) &= \lim_n \sum_{i=1}^n P(A_i) = \lim_n P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \\ &= P\left(\lim_n \sum_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_n \sum_{i=1}^n A_i\right) \\ &= P\left(\bigcup_n A_n\right).\end{aligned}$$

在基本假设下, 反过来, 可列可加性蕴含着:

- $P(\emptyset) = 0: A_n = \emptyset, \forall n.$
- 有限可加性: $A_m = \emptyset, \forall m > n,$

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

- $P(C - A) = P(C) - P(A), P(A^c) = 1 - P(A).$
- 单调性: 若 $A \subseteq C$, 则 $P(C) \geq P(A).$

● 连续性: $\lim_n P(A_n) = P(\lim_n A_n)$.

(1) 设 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, 记 $A = \bigcup_n A_n$.

(2) 记 $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

(3) 则

$$A_n = \sum_{i=1}^n B_i, \quad \lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{i=1}^{\infty} B_i.$$

(4) 故,

$$P\left(\lim_n A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_n \sum_{i=1}^n P(B_i) = \lim_n P(A_n).$$

事件域(σ 代数)

定义

- 若 $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega := \{A : A \subseteq \Omega\}$ 满足下列三条, 则称 \mathcal{F} 为 Ω 的一个事件域(σ 代数; σ 域).

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(2) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $A^c \in \mathcal{F}$,

(3) 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

- 含 Ω, \emptyset ; 对可数次交、并、补运算封闭.
- 最大/小的 σ 代数: 2^Ω ; $\{\emptyset, \Omega\}$.
- 若 $A \in \mathcal{F}$, 则称 A (关于 \mathcal{F}) 可测.

σ 代数的含义: 观测能力、信息量.

例. 投两枚硬币, $\Omega = \{HH, TT, TH, HT\}$.

- σ 代数选法1: $\mathcal{F} = 2^\Omega$.
- “基本事件”:

$$A_1 = \{HH\}, A_2 = \{TT\}, A_3 = \{HT, TH\}.$$

σ 代数选法2:

$$\mathcal{G} = \left\{ \emptyset, \underline{A_1}, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, \underline{A_2 \cup A_3}, \Omega \right\}$$

• 例. $\Omega = \{R, O, Y, G, B, P\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$,

• “基本事件”:

$$\{R, G\}, \{O\}, \{Y\}, \{B\}, \{P\}.$$

• $\mathcal{G} =$

$$\left\{ \emptyset; \{R, G\}, \{O\}, \{Y\}, \{B\}, \{P\}; \Omega; \{O, Y, B, P\}, \right. \\ \{R, G, O, Y, B\}, \{R, G, O, Y, P\}, \{R, G, O, B, P\}, \{R, G, Y, B, P\}; \\ \{R, G, O\}, \{R, G, Y\}, \{R, G, B\}, \{R, G, P\}, \\ \{O, Y\}, \{O, B\}, \{O, P\}, \{Y, B\}, \{Y, P\}, \{B, P\}; \\ \{R, G, O, Y\}, \{R, G, O, B\}, \{R, G, O, P\}, \{R, G, Y, B\}, \{R, G, Y, P\}, \\ \left. \{R, G, B, P\}, \{O, Y, B\}, \{O, Y, P\}, \{O, B, P\}, \{Y, B, P\} \right\}.$$

• $\mathcal{G} = \left\{ A : R, G \in A, \text{ 或 } R, G \in A^c \right\}$. 例, $\{R, B\} \notin \mathcal{G}$.

σ 代数的生成.

- \mathcal{A} 生成的 σ 代数: 包含 \mathcal{A} 的最小 σ 代数,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{F} \text{ 是 } \sigma \text{ 代数, } \mathcal{F} \supseteq \mathcal{A}} \mathcal{F}.$$

- 离散 σ 代数:

假设 $A_i, i \in I$, 是 Ω 的划分, 其中 $I = \{1, \dots, n\}$ 或 $\{1, 2, \dots\}$.

$$\mathcal{A} = \{A_i : \forall i \in I\}, \quad \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcup_{i \in J} A_i : J \subseteq I \right\}.$$

称 $A_i, i \in I$, 为基本事件.

Borel σ 代数 $\mathcal{B}(\cdot)$: 开集生成的 σ 代数.

- $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{A}),$

$$\mathcal{O} = \{(a, b) : a < b\}, \quad \mathcal{A} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}.$$

- 没有“基本事件”： $\{x\} \in \mathcal{B}$, 但 $\mathcal{B} \neq \sigma(\{\{x\}, x \in \mathbb{R}\})$.
- $\mathcal{B}([0, 1]) = \{B \cap [0, 1] : B \in \mathcal{B}\}.$
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{A}),$

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_d] : x_1, \cdots, x_d \in \mathbb{R}\}.$$

例1.5.9. 目标: 建立 $[0, 1]$ 上的几何概型.

- 找 $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ 同时满足基本假设、可列可加性、
长度的直观: $P((a, b)) = b - a, \forall 0 < a < b < 1.$
- 取 $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$.
 $\exists! P : \mathcal{B}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\star\star$, $\star\star$ 和 $\star\star$. (Lebesgue 测度)
- 取 $\mathcal{F} = [0, 1]$ 上所有Lebesgue可测集亦可.
- 取 $\mathcal{F} = 2^{[0, 1]}$? (可以证明, 存在非Lebesgue可测集.)

定义

● 假设 \mathcal{F} 是 Ω 上的一个 σ 代数. 若 $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足下列三条, 则称 P 为 (Ω, \mathcal{F}) 上的一个概率. (定义1.5.2)

(1) **非负性**: $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$.

(2) **规范性**: $P(\Omega) = 1$. (归一化)

(3) **可列可加性**: 若 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, 两两不交(互不相容), 则

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

● Ω : 样本空间; (Ω, \mathcal{F}) : 可测空间; (Ω, \mathcal{F}, P) : 概率空间.

- 古典概型: $\mathcal{F} = 2^\Omega$; 几何概型: $\Omega, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

$$P : A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|} \text{ 是概率.}$$

- 不可能事件. 空集 \emptyset , 零概率事件: $P(A) = 0$.
 - 例. 几何概型, $\Omega = [0, 1]$, $A = \{\frac{1}{2}\}$.
- 若 $P(A) = 1$, 则称 A 几乎必然发生, 记为 A a.s..
a.s. = almost surely
- 若 $P(A) = p$, 则称 A 以概率 p 发生.

概率的性质:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$. (布尔不等式)
- $P(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n P(A_n)$. (次可列可加性)
- $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$. (Bonferroni 不等式)
- 若当(Jordan)公式:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) \\ &\quad + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) - \cdots \\ &\quad + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdots A_n). \end{aligned}$$

例1.5.6. n 封信, n 只信封, 随机装(每只信封装一封信), $A =$ “至少装对1封”, 求: $P(A)$.

- $A_i =$ “第 i 封装对”, $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

$$P(A_1 \cdots A_k) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

- 若当公式:

$$P(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}.$$

- $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-1}$.

例1.5.8. 离散概率空间.

- $\Omega = \{1, \dots, n\}$ (或 $\{1, 2, \dots\}$). $\mathcal{F} = 2^\Omega$.

- $P(\{i\}) = p_i, \forall i$.

$$p_i \geq 0, \forall i; \quad \sum_i p_i = 1.$$

- $P(A) = \sum_{i \in A} p_i, \forall A \in \mathcal{F}$.

- 一般地, 设 \mathcal{F} 有基本事件 $A_i, i \in I$.

- $\mathcal{F} = \sigma(\{A_i, i \in I\})$:

$$P(A_i) = p_i, \forall i \in I; \quad P(A) = \sum_{i \in J} p_i, \quad \forall A = \sum_{i \in J} A_i \in \mathcal{F}.$$

反例. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$.

- $\mathcal{A} = \{A, B\}$, $\sigma(\mathcal{A}) = 2^\Omega$.
- $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. $p_1 = p_4 = a$; $p_2 = p_3 = \frac{1}{2} - a$.
- π 系: 非空; 若 $A, B \in \mathcal{A}$, 则 $AB \in \mathcal{A}$.

关键点: \mathcal{A} 不是 π 系.

例. $\Omega = \mathbb{R}$. $\mathcal{A} = \{A_x : x \in \mathbb{R}\}$, 其中 $A_x := (-\infty, x]$.

- $F(x) = P(A_x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ 可以“唯一确定” $P(B)$, $\forall B \in \mathcal{B}$.
- F 必须相容, 即, 为分布函数:

$$F \nearrow; \quad F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1; \quad F(x+) = F(x).$$

- 若 F 是分布函数, 则存在 P .